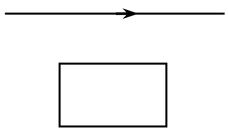
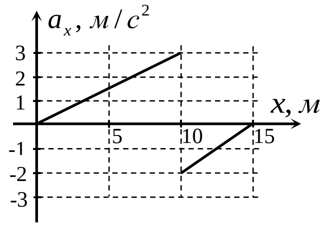
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс
2018-2019 учебный год
(комплект 1)

1. Сосуд разделен нетеплопроводящей перегородкой на два отсека. В первом отсеке объемом V находится идеальный газ при температуре T под давлением p. Во втором отсеке объемом $2V$ находится такой же идеальный газ при температуре $4T$ под давлением $3p$. Какие температура и давление установятся в сосуде если убрать перегородку. Потерями энергии в окружающее пространство пренебречь.

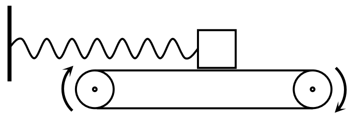
2. Около очень длинного прямого провода, по которому течет постоянный ток, находится прямоугольная проводящая рамка. Длинная сторона рамки параллельна проводу. Если повернуть рамку на угол $180°$ вокруг дальней от провода стороны, по ней пройдет заряд q_1. Если рамку из исходного положения не поворачивая сдвинуть так, что ближняя к проводу сторона займет место дальней, по рамке пройдет заряд q_2. Какой заряд пройдет по рамке если из первоначального положения унести на очень большое расстояние?



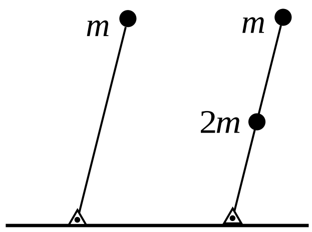
3. Тело движется в положительном направлении оси x с ускорением, график зависимости которого от координаты тела показан на рисунке. Найти скорость тела в тот момент времени, когда его координата равнялась $x = 6$ м, если начальная координата тела равнялась нулю, а начальная скорость - $v_0 = 5$ м/с.



4. Тело массой m прикреплено к пружине с жесткостью k, второй конец которой прикреплен к вертикальной стенке. Тело кладут на горизонтальную ленту транспортера, при этом пружина расположена горизонтально (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и лентой равен μ. В момент времени $t = 0$ лента начинает двигаться, при этом ее скорость возрастает по закону $v = at$. В результате действия сил трения и упругости тело начинает совершать колебания. Найти их амплитуду.



5. На конце невесомого стержня укреплено очень маленькое тело массой m. Второй конец стержня закреплен шарнирно на горизонтальной поверхности. Если расположить стержень под некоторым углом к вертикали, а затем отпустить, он будет падать на поверхность в течение времени t. Какое время будут падать на поверхность стержень, если к его середине прикрепить маленькое тело массы $2m$, расположить под таким же углом к поверхности и отпустить?



Решения. Критерии оценивания

1. Основная идея решения этой задачи заключается в использовании закона сохранения энергии – вся энергия, которая была заключена в сосуде до удаления перегородки, в нем и останется. Поэтому

$$\alpha\nu_1 RT_1 + \alpha\nu_2 RT_2 = \alpha\left(\nu_1 + \nu_1\right) RT_3 \qquad (*)$$

где α - коэффициент, зависящий от атомности газа (3/2, 5/2 и др.), ν_1 и ν_2 - количество вещества газа в первом и втором отсеках соответственно, $T_1 = T$ и $T_2 = 4T$ - температуры газа в отсеках, T_3 - конечная температура газа. Находя количество вещества газа из закона Клапейрона-Менделеева для газа в отсеках, получим из (*)

$$\nu_1 = \frac{pV}{RT}, \quad \nu_2 = \frac{3p2V}{R4T} \qquad \Rightarrow \qquad T_3 = \frac{14T}{5}$$

Установившееся давление найдем по закону Клапейрона-Менделеева

$$p_3 = \frac{\left(\nu_1 + \nu_2\right) RT_3}{3V} \qquad \Rightarrow \qquad p_3 = \frac{7p}{3}$$

Критерии оценки задачи

1. использование закона сохранения энергии – 0,5 балла,

2. правильные выражения для энергии (без конкретизации числового коэффициента, зависящего от атомности газа) – 0,5 балла,

3. правильно найдена конечная температура – 0,5 балла,

4. Правильно найдено конечное давление – 0,5 балла,

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.

2. Согласно закону электромагнитной индукции в каждый момент времени в контуре течет ток

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \qquad (*)$$

где $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока через контур за малый интервал времени Δt вблизи рассматриваемого момента, R - сопротивление контура. Из (*) получаем, что заряд, протекший через контур за малый интервал времени Δt определяется изменением магнитного потока через контур за этот интервал времени

$$\Delta q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} \qquad (**)$$

Разбивая время вращения контура вокруг своей дальней стороны на бесконечно малые интервалы времени Δt_1, Δt_2, …, находя заряды, протекшие через контур за этот интервал времени и складывая, найдем заряд, протекший через контур

$$q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + ... = I_1\Delta t_1 + I_2\Delta t_2 + I_3\Delta t_3 + ... = \frac{\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + ...}{R}$$

Или

$$q=\frac{(\Phi_2-\Phi_1)+(\Phi_3-\Phi_2)+(\Phi_4-\Phi_3)+...}{R}=\frac{\Phi_{кон}-\Phi_{нач}}{R}$$

где $\Phi_{нач}$ и $\Phi_{кон}$ - начальный и конечный магнитные потоки через контур.

Пусть магнитный поток через контур в начальном положении равен Φ_1, а в положении, когда он сдвинут так, что ближняя сторона занимает место дальней, равен Φ_2. Тогда первое условие дает

$$q_1=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R} \qquad (*)$$

Когда контур поворачивают относительно дальней стороны, он занимает такое же место, как и при сдвиге, но по-другому ориентирован. Поэтому поток через него будет таким же по величине и противоположен по знаку - $-\Phi_2$. И второе условие дает

$$q_2=\frac{-\Phi_2-\Phi_1}{R} \qquad (**)$$

Когда контур уносят на очень большое расстояние, поток через становится равным нулю, и изменение потока при унесении его из первоначального положения равно $-\Phi_1$. Поэтому заряд, протекший через него в этом случае, есть

$$q_3=\frac{-\Phi_1}{R}$$

И из формул (*)-(**) заключаем

$$q_3=\frac{q_1+q_2}{2}$$

Критерии оценки задачи

1. использован закон электромагнитной индукции – 0,5 балла,
2. доказано, что протекший через контур заряд равен полному изменению магнитного потока, деленного на сопротивление контура – 0,5 балла,
3. использовано условие, что при вращении контура вокруг дальней стороны изменение потока такое же но с другим знаком – 0,5 балла,
4. правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.

3. Рассматриваемое движение не является равноускоренным. Мысленно назобьем перемещение тела на малые элементы Δx_1, Δx_2, … настолько малые, что движение на каждом можно считать равноускоренным. Тогда для n-го элемента Δx_n имеем

$$v_{n+1}^2-v_n^2=2a_n\Delta x_n$$

где v_{n+1} и v_n скорость тела в конце и в начале элемента, a_n - проекция ускорения тела на ось у x внутри этого элемента. Складывая такие равенства для каждого элемента, найдем

$$v_{кон}^2 - v_{нач}^2 = 2\left(a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + a_3\Delta x_3 + ...\right)$$

где $v_{кон}$ и $v_{нач}$ - скорость тела в начале и в конце нашего движения. Сумма в скобках в правой части имеет смысл площади под графиком зависимости проекции ускорения от координаты. Вычисляя эту площадь (по графику, используя пропорциональные соотношения), получим

$$v_{кон}^2 = v_{нач}^2 + 10,8\,(м^2/с^2)$$

Отсюда $v_{кон} = \sqrt{35,8} = 5,98$ м/с.

Критерии оценки задачи

1. движение мысленно разбито на малые участки, такие, что внутри каждого движение можно считать равноускоренным – 0,5 балла,

2. для каждого малого участка найдена разность квадратов начальной и конечной скоростей – 0,5 балла,

3. понято, что сумма таких разностей, с одной стороны, определяет разность квадратов скоростей вначале и в конце рассматриваемого этапа движения, а с другой, - – 0,5 балла,

4. правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.

4. При движении ленты на тело начинает действовать сила трения, направленная в сторону движения ленты, которая будет сдвигать тело из положения равновесия, Но эти колебания будут разными в случае, когда $a > \mu g$, и $a < \mu g$.

Действительно, в первом случае между телом и лентой возникнет проскальзывание, потому что сила трения не сможет сообщить ему такое же ускорение, как у ленты. И в дальнейшем скорость ленты будет расти, и между телом и лентой всегда будет проскальзывание. Поэтому на тело будет действовать постоянная сила трения μmg, направленная в сторону движения ленты (независимо от движения тела). Поэтому движение тела полностью эквивалентно колебанию тела на вертикально расположенной пружине в поле силы тяжести. Поэтому тело будет совершать колебания около положения растянутой пружины ($\Delta x = \mu mg/k$) с амплитудой $A = \mu mg/k$.

Если же ускорение ленты $a < \mu g$, то силы трения между телом и лентой достаточно, чтобы сообщить телу ускорение ленты. Поэтому некоторое время тело будет двигаться вместе с лентой с ее ускорением, растягивая пружину. И при достижении достаточно большой деформации тело начнет двигаться относительно ленты. Это произойдет, когда смещение тела относительно положения равновесия Δx станет таким, что разность сил трения и упругости не смогут сообщить телу ускорение ленты

$$\mu mg - k\Delta x = ma$$

Или

$$\Delta x = \frac{m(\mu g - a)}{k}$$

В дальнейшем скорость ленты будет продолжать возрастать, поэтому независимо от движения тела между телом и лентой будет действовать постоянная сила трения, направленная по движению ленты. Поэтому тело будет совершать гармонические колебания под действием упругой силы в «поле» постоянной силы μmg. Т.е. колебания тела на ленте аналогичны колебаниям тела на вертикально расположенной пружине в поле силы тяжести. В частности, положение равновесия тела будет сдвинуто по отношению к положению недеформированной пружины на величину

$$\Delta l = \frac{\mu mg}{k}$$

Найдем амплитуду колебаний тела. Для этого найдем его скорость в момент начала скольжения по ленте. Поскольку до этого момента тела движется с постоянным ускорением a, то из законов равноускоренного движения имеем

$$\Delta x = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{a}} = \sqrt{\frac{2m(\mu g - a)}{ka}} \quad \Rightarrow \quad v = at = \sqrt{\frac{2ma(\mu g - a)}{k}}$$

где t - время, прошедшее от начала движения ленты до начала скольжения тела относительно ленты. Теперь по закону изменения механической энергии получаем для момента, когда скорость тела станет равной нулю

$$E_{кон} - E_{нач} = A_{тр} \quad \Rightarrow \quad \frac{k\Delta y^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta x^2}{2}\right) = \mu mg(\Delta y - \Delta x)$$

где $E_{кон}$ и $E_{нач}$ - механические энергии системы тело-пружина в тот момент, когда скорость тела относительно земли станет равной нулю, и в момент начала проскальзывания относительно ленты, $A_{тр}$ - работа силы трения между началом скольжения тела и его остановкой, Δy - смещение тела по отношению к положению на недеформированной пружине. В результате получаем квадратное уравнение для Δy:

$$\frac{k\Delta y^2}{2} - \mu mg\Delta y + \frac{m^2(\mu g - a)^2}{2k} = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$\Delta y = \frac{\mu mg}{k} \pm \frac{m\sqrt{a(2\mu g - a)}}{k}$$

Эти два значение и определяют два положения тела слева и справа от положения равновесия ($\mu mg / k$), в которых скорость тела будет обращаться в нуль. Поэтому амплитуда колебаний тела равна

$$A = \frac{m\sqrt{a(2\mu g - a)}}{k}$$

Критерии оценки задачи

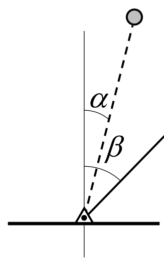
1. понято, что необходимо рассмотреть 2 случая: большого и малого трения – 0,5 балла,

2. правильно рассмотрим случай малого трения – 0,5 балла,

3. в случае большого трения правильно найден момент начала скольжения и составлено правильное уравнение закона сохранения энергии – 0,5 балла,

4. правильный ответ для большого т рения – 0,5 балла,

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.



5. Сравним угловые скорости стержней в тот момент, когда они будут расположены под некоторым углом к поверхности. Итак, рассмотрим первый стержень (с одним телом). Когда он окажется под углом β к вертикали, убыль потенциальной энергии буде равна

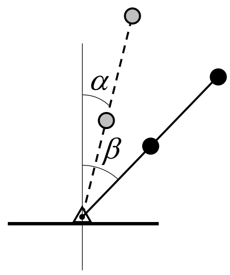
$$\Delta\Pi = mgl\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

где α - начальный угол между стержнем и вертикалью (см. рисунок). Поэтому закон сохранения механической энергии дает

$$mgl\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 l^2}{2}$$

где v и ω - скорость тела и угловая скорость стержня в тот момент, когда он будет наклонен под углом β к поверхности. Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)}{l}}$$



Рассмотрим теперь второй стержень в тот момент, когда он будет наклонен под углом β к поверхности (см. рисунок). Убыль потенциальной энергии для него будет определяться выражением

$$\Delta\Pi = mgl\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) + 2mg\frac{l}{2}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = 2mgl\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

А закон сохранения механической энергии для этого стержня дает

$$2mgl\left(\cos\alpha - \cos\beta\right) = \frac{m\omega_1^2 l^2}{2} + \frac{2m\omega_1^2\left(l/2\right)^2}{2} = \frac{3m\omega_1^2 l^2}{4}$$

где ω_1 - угловая скорость второго стержня в тот момент, когда он будет наклонен под углом β к поверхности. Отсюда находим

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8g\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)}{3l}}$$

Отсюда следует, что отношение времен, которые стержень затрачивает на прохождение каждого малого поворота равно

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

И не зависит от угла β. Это значит, что и отношение полных времен движения такое же. Или

$$t_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}t$$

Критерии оценки задачи

1. правильная основная идея решения – сравнение угловых скоростей спиц на одинаковых высотах – 0,5 балла,

2. правильное использование закона сохранения энергии для нахождения отношение угловых скоростей спиц на одинаковых высотах – 0,5 балла,

3. правильно найдено отношение угловых скоростей спиц, и следовательно, времен прохождения малых углов – 0,5 балла,

4.правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.