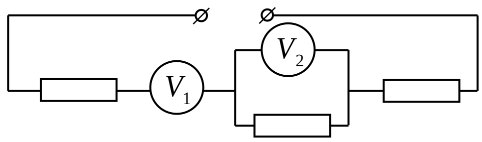
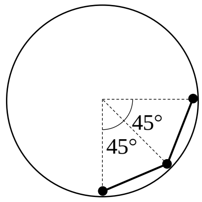
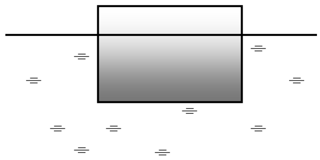
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 10 класс
2018-2019 учебный год



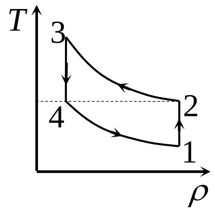
1. Электрическую цепь собрали из двух одинаковых вольтметров и трех одинаковых резисторов. К цепи подключили источник постоянного напряжения. Известно, что показания вольтметра V_1 отличаются от показания вольтаметра V_2 в три раза, при этом вольтметр V_1 показал напряжение $U_1 = 12$ В. Найти напряжение источника.



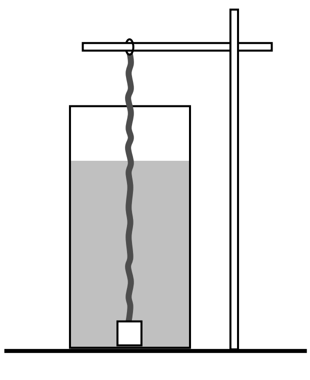
2. Три одинаковых массивных шарика связывают двумя невесомыми стержнями и удерживают в вертикальной плоскости так, что шарики касаются внутренней поверхности закрепленной сферы. (см. рисунок). В некоторый момент шарики отпускают. Найти ускорения шариков сразу после их освобождения. Трением пренебречь.



3. Имеется неоднородный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, плотность которого уменьшается с высотой. Опущенный в воду, брусок плавает, погрузившись в воде на 2/3 объема. Если разрезать брусок пополам и опустить в воду более легкую половину, она будет плавать, погрузившись наполовину. Будет ли плавать нижняя половина Если да, то найти минимальную силу, которую нужно приложить нижней половине к бруска, чтобы утопить ее. Если нет, то найти минимальную силу, которую нужно приложить к нижней половине бруска, чтобы оторвать ее от дна. Масса бруска m



4. С некоторым количеством одноатомного идеального газа проводят циклический процесс 1-2-3-4-1. График зависимости абсолютной температуры газа от его плотности приведен на рисунке. На участках 1-2 и 3-4 зависимости изображаются на графике вертикальными прямыми, на участках 2-3 и 4-1 температура обратно пропорциональна плотности. Известно также, что температуры газа в состояниях 2 и 4 равны друг другу и абсолютная температура в состояниях 2 и 4 вдвое больше абсолютной температуры в состоянии 1. Известно также, что в течение цикла газ получает от нагревателя количество теплоты Q, а частота повторения циклов ν. Найти мощность двигателя, работающего по данному циклу.



5. В цилиндрическом стакане лежит небольшое массивное тело, прикрепленное к резиновому жгуту с коэффициентом жесткости $k = 100$ н/м. Второй конец жгута прикреплен к лапке штатива на расстоянии $l = 1$ м от дна стакана. Известно, что в этом положении жгут растянут на $\Delta l = 20$ см. В стакан очень медленно наливают холодную воду, и по мере охлаждения резины ее жесткость увеличивается. Причем известно, что если весь жгут охладить до данной температуры, его жесткость будет равна $4k$. При какой высоте столба жидкости в стакане груз оторвется от дна? Масса груза $m = 4$ кг, силой Архимеда пренебречь. Считать, что температура резины, опущенной в воду, равна температуре воды; температура резины, не находящейся в воде, равна температуре воздуха.

Решения. Критерии оценки решений задач

1. Пусть сопротивление резистора r. Найдем сопротивление вольтметра. Ток, текущий через вольтметр V_1, делится на две части – ток, текущий через вольтметр V_2, и ток, текущий через центральный резистор. А так как вольтметры имеют одинаковое сопротивление, из закона Ома заключаем, что напряжение на вольтметре V_2 меньше напряжения на вольтметре V_1. А поскольку по условию $V_1 = 3V_2$, то через вольтметр V_2 течет треть тока, текущего через вольтметр V_1. А, значит, оставшиеся две трети тока текут через центральный резистор. Поэтому токи, текущие через вольтметр V_2 и центральный резистор, отличаются вдвое, и, следовательно, сопротивление вольтметра R вдвое больше сопротивления резистора

$$R = 2r$$

А поскольку через правый и левый резисторы течет тот же ток, что и через вольтметр V_1, напряжение на них вдвое меньше, чем на вольтметре V_1. Поэтому, если вольтметр V_1 показывает напряжение U_1, то напряжение на всей цепи определяется соотношением

$$U = \frac{1}{2}U_1 + U_1 + \frac{1}{3}U_1 + \frac{1}{2}U_1 = \frac{7}{3}U_1 = 28 \text{ В.}$$

Критерии оценки решения задачи

1. Доказано, что сопротивление вольтметра вдвое больше сопротивления резистора – 0,5 балла,

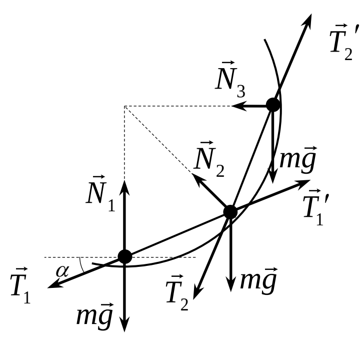
2. Использованы правила сложения токов и напряжений при последовательном и параллельном соединении – 0,5 балла,

3. Правильный ответ, правильные вычисления – 1 балл,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. На каждый шарик действуют сила тяжести, сила реакции поверхности сферы ($\vec{N}_1, \vec{N}_2$ и $\vec{N}_3$), сила (силы) реакции со стороны стержней ($\vec{T}_1$, $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_2'$). А поскольку вектор ускорения каждого шарика в первый момент после начала движения направлен вдоль поверхности полусферы, второй закон Ньютона в проекциях на ось, направленную вдоль поверхности, дает

$$ma_1 = T_1 \cos\alpha$$
$$ma_2 = mg\cos 45° + T_2\cos\alpha - T_1'\cos\alpha \qquad (*)$$
$$ma_3 = mg - T_2'\cos\alpha$$



где α - угол между силами реакции стержней и направлением вдоль поверхности (очевидно, все эти углы одинаковы; чтобы не загромождать рисунок, мы показали на нем только один из таких углов). Поскольку стержни невесомы и нерастяжимы, то $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$, и ускорения шариков – одинаковы. Поэтому при сложении уравнений (*) все силы реакции стержней сократятся, и мы сможем найти ускорение шариков. В результате получим

$$a = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{6} g$$

Критерии оценки решения задачи

1. Правильно расставлены силы, действующие на шарики – 0,5 балла,
2. Использован правильный второй закон Ньютона для поиска ускорений всех тел – 0,5 балла,
3. Использованы правильные связи между неизвестными – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Пусть средняя плотность бруска ρ, плотность воды - ρ_0. Тогда условие плавания целого бруска дает

$$\rho g V = \frac{2}{3}\rho_0 g V \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{2}{3}\rho_0$$

Условие плавания одной половинки бруска со средней плотностью ρ_1

$$\rho_1 g \frac{V}{2} = \frac{1}{2}\rho_0 g \frac{V}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0$$

С другой стороны, средняя плотность бруска так связана со средними плотностями его половинок ρ_1 и ρ_2

$$\rho = \frac{\rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{2}}{V} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

Отсюда находим среднюю плотность второй половинки

$$\rho_2 = 2\rho - \rho_1 = \frac{4}{3}\rho_0 - \frac{1}{2}\rho_0 = \frac{5}{6}\rho_0$$

Таким образом, средняя плотность второй половинки бруска меньше плотности воды, и, следовательно, вторая половинка бруска тоже будет плавать.

Чтобы полностью утопить ее в воде к ней нужно приложить силу, равную разности силы Архимеда и силы тяжести

$$F = \rho_0 g \frac{V}{2} - \rho_2 g \frac{V}{2} = \frac{1}{12}\rho_0 g V = \frac{1}{12}\frac{3}{2}\rho g V = \frac{1}{8} mg$$

Таким образом, чтобы утопить брусок в жидкости, к нему нужно приложить минимальную силу $F = mg/8$, направленную вертикально вниз.

Критерии оценки решения задачи

1. Из условия плавания всего бруска найдена его средняя плотность – 0,5 балла,

2. Из условия плавания одной половины бруска правильно найдена её средняя плотность – 0,5 балла,

3. Из средней плотности всего бруска и средней плотности одной его половины правильно найдена средняя плотность другой половины – 0,5 балла,

4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Поскольку в процессах 1-2 и 3-4 не меняется плотность, эти процессы - изохорические. В процессах 2-3 и 4-1 $T \sim 1/\rho \sim V$, и, следовательно, эти процессы изобарические. Поэтому в координатах $p-V$ график процесса является прямоугольником, причем точки 2 и 4 лежат на одной гиперболе (изотерме).

Очевидно, температура газа в состоянии 3 равна $4T$. Действительно, из закона Клапейрона-Менделеева имеем для процессов 1-2 и 2-3

$$\frac{p_2V_2}{T_3} = \frac{p_2V_1}{2T}; \qquad \frac{p_2V_1}{2T} = \frac{p_1V_1}{T};$$

Перемножая эти равенства и учитывая, что $p_2V_1 = p_1V_2$ (состояния 2 и 4 принадлежат одной изотерме), получим $T_3 = 4T$.

Найдем теперь КПД η циклического процесса 1-2-3-4-1. По определению

$$\eta = \frac{A}{Q}$$

где A - работа газа за цикл, Q - количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла. Работа газа равна площади цикла в координатах $p-V$

$$A = \left(p_2 - p_1\right)\left(V_2 - V_1\right)$$

Поскольку процесс 1-2 - изохорический, то

$$\frac{p_1}{T} = \frac{p_2}{2T} \qquad \Rightarrow \qquad p_2 = 2p_1$$

Поскольку процесс 4-1 – изобарический, то

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_2}{2T} \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = 2V_1$$

Отсюда находим $A = p_1V_1$. Найдем теперь количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя. Очевидно, что газ получает тепло на участках 1-2-3, и отдает на участках 3-4-1. Поэтому $Q = Q_{1-2-3}$. Применяя к процессу 1-2-3 первое начало термодинамики, получим

$$Q = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3}$$

Изменение внутренней энергии найдем с использованием закона Клапейрона-Менделеева

$$\Delta U_{1-2-3} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{3-1} = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right) = \frac{9}{2}p_1V_1$$

Работу A_{1-2-3} – как площадь под графиком процесса в координатах $p-V$

$$A_{1-2-3} = p_2\left(V_2 - V_1\right) = 2p_1V_1$$

Отсюда находим количество теплоты, полученное двигателем у нагревателя

$$Q = \frac{13}{2}p_1V_1$$

А затем и КПД процесса

$$\eta = \frac{2}{13}$$

Таким образом работа газа составляет

$$A = \frac{2}{13}Q\,,$$

И в единицу времени совершается ν циклов. Поэтому работа двигателя в единицу времени (т.е. мощность) равна

$$N = \frac{2}{13}Q\nu$$

Критерии оценки решения задачи

1. Доказано, что температура газа в состояниях 2 и 4 равна среднему геометрическому температур в состояниях 1 и 3 – 0,5 балла,
2. Правильный метод вычисления КПД цикла. Правильные термодинамические соотношения для работ и теплот – 0,5 балла,
3. Правильно вычислен КПД цикла – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу - сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка – 2 балла.

5. Поскольку жгут деформирован и его жесткость при охлаждении возрастает, то возрастает сила упругости, которая при некотором количестве воды в стакане оторвет тело от дна. Рассмотрим ситуацию, когда сила упругости практически достигла силы тяжести груза. Пусть для этого нам пришлось налить в стакан слой воды высотой h, длина участка жгута над поверхностью равна $l-h$. Найдем длины участков жгута, находящихся под и над поверхностью, в недеформированном состоянии.

Пусть недеформированная длина участка жгута, находящегося над поверхностью, равна l_1. Тогда (поскольку коэффициент жесткости зависит от длины) его коэффициент жесткости k_1 будет равен $k_1 = kl_0/l_1$, где $l_0 = l - \Delta l = 80$ см – длина всего жгута в недеформированном состоянии. А поскольку сила упругости жгута равна силе тяжести груза - mg, находим

$$l - h = l_1 + \Delta l = l_1 + \frac{mg}{k_1} = l_1\left(1 + \frac{mg}{kl_0}\right) \qquad \Rightarrow \qquad l_1 = \frac{l-h}{1 + \dfrac{mg}{kl_0}} \qquad (*)$$

Аналогично найдем длину участка жгута, находящегося под поверхностью, в недеформированном состоянии. Пусть эта длина равна l_2. Тогда, проводя аналогичные рассуждения и учитывая, что коэффициент жесткости холодного целого жгута равна $4k$, получаем

$$h = l_2 + \Delta l_2 = l_2 + \frac{mg}{k_2} = l_2\left(1 + \frac{mg}{4kl_0}\right) \qquad \Rightarrow \qquad l_2 = \frac{h}{1 + \dfrac{mg}{4kl_0}} \qquad (**)$$

А поскольку недеформированная длина всего нашего жгута равна l_0 из (*) и (**) получаем уравнение для нахождения величины h

$$l_1 + l_2 = l_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{l-h}{1+\dfrac{mg}{kl_0}} + \frac{h}{1+\dfrac{mg}{4kl_0}} = l_0$$

Отсюда получаем окончательно для высоты уровня воды в стакане, при котором груз оторвется от дна

$$h = \frac{4}{3}\frac{kl_0}{mg}\left(1+\frac{mg}{4kl_0}\right)\left(\frac{mg}{k} - \Delta l\right) = 60 \text{ см}$$

Критерии оценки решения задачи

1. Использовано то обстоятельство, что жесткость шнура обратно пропорциональна его длине – 0,5 балла,

2. правильно найдены длины недеформированных частей шнура, находящихся над и под водой – 0,5 балла,

3. правильно применены формулы для нахождения коэффициентов жесткости последовательно соединенных шнуров – 0,5 балла,

4. Правильное решение, правильные вычисления – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Оценка работы находится как сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов.