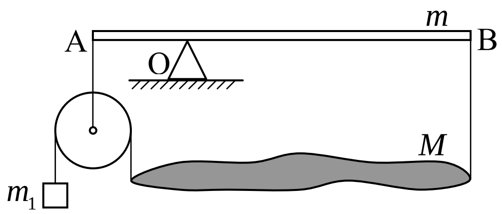
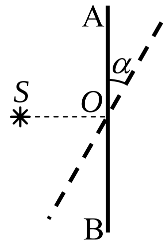
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс, 2017-2018 учебный год, комплект 2

1. Рычаг АВ массой m находится в равновесии на точечной опоре О. Плечи рычага относятся как АО:ОВ=1:2. К концам рычага с помощью невесомых нитей прикреплены невесомый блок и неоднородное тело массой M. Ко второму концу тела прикреплена нить с грузом, переброшенная через блок. Найти массу груза m_1.

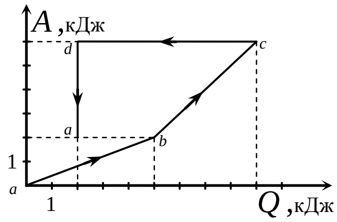


2. Точечное тело начинает движение из точки $x=0$ в положительном направлении оси x. Известно, что координата тела x и его скорость в процессе движения связаны соотношением $x=Av_x^2+B$, где $A=-2$ с^2/м, $B=2$ м. Вернется ли тело в точку $x=0$ и если да, то через какое время после выхода из нее?

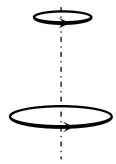
3. Точечный источник света S находится на расстоянии $d=15$ см от зеркала АВ (см. рисунок). Зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через основание перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало (через точку О). Найти мгновенную скорость и мгновенное ускорение изображения источника в зеркале в тот момент, когда зеркало повернулось на угол $\alpha=30°$ по сравнению с первоначальным положением.



4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс a-b-c-d-a (начальное и конечное состояния газа совпадают). Дан график зависимости работы, совершенной газом с начала процесса, от количества теплоты, полученного газом с начала процесса. Качественно построить график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и объяснить построение. Найти КПД процесса.



5. Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



Решения

1. Пусть сила натяжения левой нити (привязанной к телу) - T_1, правой - T_2. Тогда условие равновесия тела дает

$$Mg = T_1 + T_2$$

С другой стороны, из условия равновесия груза имеем $T_1 = m_1 g$. Из условия равновесия блока находим силу натяжения нити T_3, связывающей левый конец рычага с осью блока $T_3 = 2T_1 = 2m_1 g$. Поэтому из условия равновесия рычага имеем

$$\frac{1}{3}T_3 = \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{3}m_1 g = \frac{2}{3}\left(Mg - m_1 g\right) + \frac{1}{6}mg$$

Отсюда находим

$$m_1 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{8}m$$

Критерии оценки задачи

1. Условие равновесия тела (уравнение сил) – 0,5 балла
2. Условие равновесия груза m_1 – 0,5 балла
3. Условия равновесия рычага – 0,5 балла
4. Доведена до правильного ответа - 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Поскольку тело начинает движение из точки $x = 0$, то его начальную скорость можно найти из уравнения, связывающего координату и скорость, подставляя в него значение $x = 0$:

$$v_{0,x} = \sqrt{-\frac{B}{A}}$$

(с учетом отрицательного значения B и положительного A под корнем положительное число, перед корнем взят знак «+», поскольку по условию тело начало движение в положительном направлении оси x).

Определим теперь характер движения тела. Для этого продифференцируем данную функцию по времени и найдем, таким образом, связь его скорости и ускорения

$$\frac{dx}{dt} = 2Av_x \frac{dv_x}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad v_x = 2Av_x a_x \qquad \Rightarrow \qquad a_x = \frac{1}{2A} = \text{const} \qquad (*)$$

где a_x - проекция ускорения на ось x. Из формулы (*) следует, что проекция ускорения постоянна и отрицательны. Поэтому тело движется равноускоренно сначала в положительном направлении оси x с торможением, а затем, разгоняясь, в отрицательном направлении оси x. Поэтому тело обязательно попадет в точку $x = 0$. Чтобы найти время движения до этой точки воспользуемся аналогией с движением вблизи поверхности земли. Если тело бросить вертикально вверх с начальной скоростью v_0, оно упадет на землю через время

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}$$

Поэтому наше тело вернется в точку $x = 0$ через время

$$\Delta t = \frac{2v_{0,x}}{|a_x|} = 2\sqrt{-\frac{B}{|A|}}2|A| = 4\sqrt{B|A|} = 8 \text{ с}$$

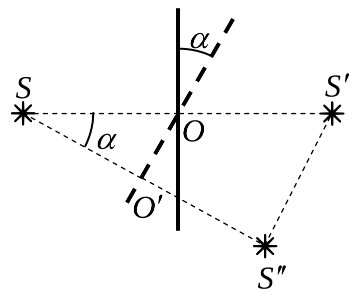
Критерии оценки задачи

1. Найдена начальная скорость – 0,5 балла
2. Доказано, что движение тела равноускоренное – 0,5 балла,
3. Найдено ускорение – 0,5 балла,
4. Правильный ответ, правильные вычисления – 0,5 балла

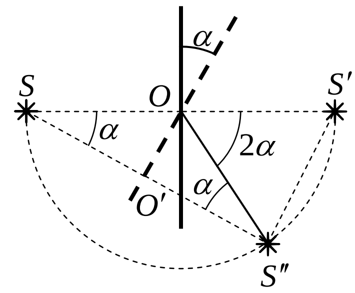
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S''; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$



А поскольку угол $SO'O$ - прямой, то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до зеркала в начальный момент, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке справа.



Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α. Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω', которая вдвое больше угловой скорости зеркала

$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому ускорение изображения является центростремительным, его величина постоянна (т.е. не зависит от данного в условии угла α) и равна

$$a' = (2\omega)^2 R = 4\omega^2 d = 0,6 \text{ м/с}^2$$

Критерии оценки задачи

1. Правильное построение изображение источника в зеркале – 0,5 балла
2. Доказано, что изображение источника движется по окружности и найден радиус этой окружности – 0,5 балла,
3. Найдено угловая скорость вращения изображения – плюс 0,5 балла,
4. Правильный ответ, правильные вычисления – плюс 0,5 балла

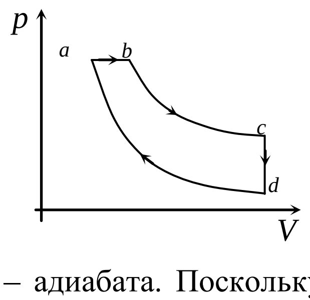
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. Из графика видим, что для первого процесса a-b (начало процесса – в начале координат) выполнено условие

$$A_{a-b} = \frac{5}{2} Q_{a-b}$$

где A_{a-b} - работа газа, Q_{a-b} - количество теплоты, полученное газом. Такая связь работы и количества теплоты, полученного одноатомным газом, характерна для изобарического процесса. Поэтому процесс a-b – изобарический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{a-b} = 5$ кДж. В процессе b-c $A_{b-c} = Q_{b-c}$, поэтому $\Delta U_{b-c} = 0$, и, следовательно, процесс b-c – изотермический, в котором газ получил количество теплоты $Q_{b-c} = 4$ кДж. На участке c-d работа газа, совершенная с начала процесса, не меняется, следовательно, $A_{c-d} = 0$ - процесс c-d изохорический, в котором газ отдает количество теплоты $Q_{c-d} = 4$ кДж. После состояния d количество теплоты, полученное газом с начала процесса не меняется, $Q_{d-a} = 0$, процесс d-a – адиабатический, в котором газ совершает работу $A_{d-a} = -4$ кДж. Таким образом, за цикл газ совершил положительную работу $A_{a-b-c-d-a} = 2$ кДж, а получил от нагревателя (участки a-b-c, на которых газ получал тепло) следующее количество теплоты $Q_{a-b-c} = Q_{a-b} + Q_{b-c} = 9$ кДж. Поэтому КПД циклического процесса a-d-c-d-a равен

$$\eta_{a-b-c-d-a} = \frac{A_{a-b-c-d-a}}{Q_{a-b-c}} = \frac{2}{9} = 0,22$$



Качественный график процесса a-d-c-d-a в координатах $p - V$ приведен на рисунке, в котором процесс a-b – изобара, b-c – изотерма, c-d – изохора, d-a – адиабата. Поскольку работа и количество теплоты не являются функциями состояния, и в условии не задано количество вещества газа, определить параметры этого цикла (объемы, давления, температуры) по данным условия невозможно.

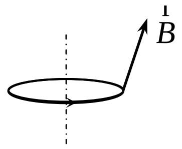
Критерии оценки задачи

1. Правильное построение графиков процессов в координатах «давление-объем» – 0,5 балла
2. Разумное обоснование графиков – 0,5 балла,
3. Найдена работа газа за цикл – 0,5 балла,
4. Найдено количество теплоты, полученное за цикл от нагревателя, и КПД – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

5. Найдем индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиуса $2R$ в области второго кольца, а затем по закону Ампера найдем силу взаимодействия колец.

Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (т.е. в области второго кольца) под некоторым углом к оси (см. рисунок). Используя далее, закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиуса R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси



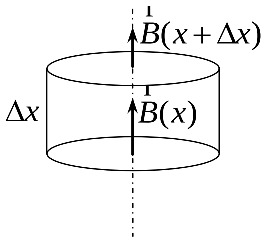
$$F = 2\pi RIB_{\perp} \tag{1}$$

где $B_{\perp}$ - составляющая вектора индукции, перпендикулярная оси кольца. Найдем $B_{\perp}$.

Используем известное выражение для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\left(2R\right)^2}{\left(\left(2R\right)^2 + x^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$

где I - ток в кольце, $2R$ - его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (см. рисунок). Т.к. величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков через основания



$$\Delta\Phi = \pi R^2\left(B\left(x\right) - B\left(x + \Delta x\right)\right) \tag{3}$$

(πR^2 - площадь оснований цилиндра) равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра

$$\Delta\Phi = B_{\perp}2\pi R\Delta x \tag{4}$$

где $2\pi R\Delta x$ - площадь его боковой поверхности. Из формул (3), (4) находим

$$B_{\perp} = -\frac{R}{2}\frac{\left(B\left(x+\Delta x\right) - B\left(x\right)\right)}{\Delta x} \tag{5}$$

Т.к. Δx мало, то выражение (5) сводится к производной величины индукции на оси кольца (2) по x. Дифференцируя функцию (2), находим по формулам (5), (1) в пределе x ? R

$$F = 6\pi\mu_0\frac{I^2R^4}{x^4}.$$

Критерии оценки задачи

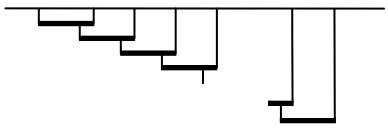
1. Нахождение индукции поля одного из токов на оси этого тока – 0,5 балла
2. Понимание, что сила определяется проекцией индукции, перпендикулярной оси – 0,5 балла,
3. Нахождение перпендикулярной проекции из условия нулевого потока через замкнутую поверхность – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла

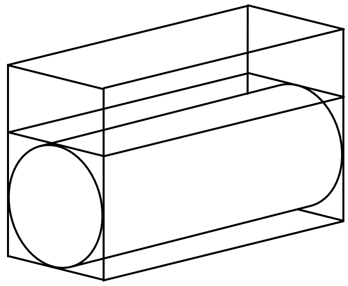
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс, 2017-2018 учебный год, комплект 3

1. Амперметр подключают к источнику, имеющему некоторое внутреннее сопротивление, и он показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Если параллельно первому амперметру подключить второй, точно такой же, то сумма показаний амперметров будет равна $I_2 = 1,2$ А. Найти сумму показаний 8 точно таких же амперметров, подключенных к этому же источнику параллельно.

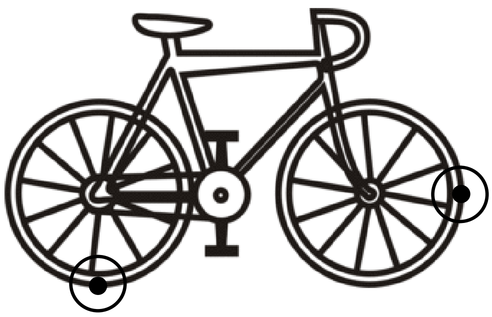
2. Имеется 2018 одинаковых стержней массой $m = 1$ кг. Каждый стержень подвешен на двух нитях, прикрепленных к его концам. Левый стержень подвешен к горизонтальному потолку. Все остальные стержни подвешены так, что одна из нитей прикреплена к потолку, вторая – к «предыдущему» стержню в точке, отстоящей на одну пятую часть его длины от его правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать, что $g = 10$ м/с^2.



3. Однородный цилиндр радиусом R и высотой h положили в кювету в форме прямоугольного параллелепипеда, длина которой на очень небольшую величину превосходит длину цилиндра h, а ширина – диаметр цилиндра, так, что цилиндр можно положить в кювету с очень небольшими зазорами между ним и стенками кюветы. Затем в кювету налили воду, которая только-только покрывает цилиндр (см. рисунок). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды? Плотность воды ρ, плотность материала цилиндра 6ρ.



4. В протекторе покрышек переднего и заднего колес велосипеда застряли два маленьких камня. В тот момент, когда камень на заднем колесе касается земли, камень на переднем находится в крайнем переднем положении (см. рисунок; камни обведены кружками). Найти минимальное расстояние между камнями в процессе движения велосипеда. Через какое минимальное время после положения, показанного на рисунке, расстояние между камнями достигает минимального значения? Скорость велосипеда v, радиус колес R, расстояние между центрами колес - $3R$. Колеса не проскальзывают по дороге.



5. Два тела с теплоемкостями $2C$ и C имеют температуры T и $3T$ соответственно. Какая минимальная температура может установиться в этой системе, если тела использовать в качестве нагревателя и холодильника теплового двигателя, а произведенная механическая работа будет «уходить» из системы? Какую максимальную работу можно получить в такой системе тел? Других потерь энергии в рассматриваемой системе нет.

Решения

1. Очевидно, что амперметры неидеальны. Действительно, если бы сопротивление амперметров равнялось бы нулю, то сумма токов через все амперметры (которая равна току через источник) определялся бы ЭДС и внутренним сопротивлением самого источника. А эта величина не меняется при подключении дополнительных амперметров. У нас же ток через источник при подключении одного амперметра и сумма токов через два амперметра – разная.

Пусть сопротивление амперметра - R, сопротивление источника - r. Тогда для тока через источник (или суммы токов через амперметры) получим из закона Ома для замкнутой цепи в первом и втором случае

$$R+r=\frac{\varepsilon}{I_1}$$

$$\frac{R}{2}+r=\frac{\varepsilon}{I_2}$$

где ε - ЭДС источника, $R/2$ - общее сопротивление двух амперметров. Из этой системы уравнений находим

$$R=\frac{2\varepsilon\left(I_2-I_1\right)}{I_1I_2}, \qquad r=\frac{\varepsilon\left(2I_1-I_2\right)}{I_1I_2}$$

Тогда закон Ома для замкнутой цепи в случае восьми амперметров, подключенных к источнику параллельно, дает

$$\frac{\varepsilon}{I_3}=\frac{R}{8}+r=\frac{\varepsilon\left(I_2-I_1\right)}{4I_1I_2}+\frac{\varepsilon\left(2I_1-I_2\right)}{I_1I_2}=\frac{\varepsilon\left(7I_1-3I_2\right)}{4I_1I_2}$$

где I_3 - ток через источник (сумма токов через амперметры). Отсюда

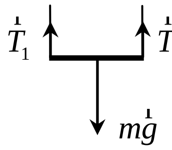
$$I_3=\frac{4I_1I_2}{7I_1-3I_2}=1{,}41\ \text{А}$$

Критерии оценки задачи

1. Понято, что сумма токов через амперметры равна току через источник, и потому ее нужно искать из закона Ома для источника (или для замкнутой цепи) – 0,5 балла,
2. Правильно написаны законы Ома для двух случаев – 0,5 балла,
3. Из полученной системы уравнений правильно найдены сопротивления амперметра и сопротивления источника – 0,5 балла,
4. Правильно записан закон Ома для 8 амперметров. Из этого уравнения правильно найден ток через источник – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. На самый правый стержень действует сила тяжести и две силы натяжения. Из симметрии задачи очевидно, что последние одинаковы. Поэтому



Первый стержень

$$T_1=\frac{mg}{2}$$

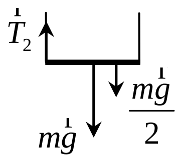
Из условия равенства нулю моментов сил, действующих на второй стержень относительно правой нити, получим (чтобы не загромождать рисунок сила натяжения правой нити на рисунке не показана)

$$T_2l=mg\frac{l}{2}+\frac{mg}{2}\frac{l}{5}=\frac{mgl}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

Отсюда находим

$$T_2=\frac{mg}{2}\left(1+\frac{1}{5}\right)$$

Условие равенства нулю моментов сил, действующих на третий стержень (относительно его правого) получим



Второй стержень

$$T_3l=mg\frac{l}{2}+T_2\frac{l}{5}=\frac{mgl}{2}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}\right)$$

Теперь ясна и дальнейшая структура формул. Сила натяжения левой нити, привязанной к n-ому стержню, будет определяться суммой конечной геометрической прогрессии

$$T_n = \frac{mg}{2}\left(1+\left(\frac{1}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Используя формулу суммы прогрессии и учитывая, что $\left(1/5\right)^{2018}$ - чудовищно малое число, получим

$$T_{2018} = \frac{mg}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2018}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5mg}{8} = 6,25\ \text{Н}$$

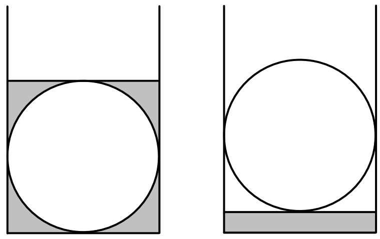
Критерии оценки задачи

1. Правильно написано условие равновесия для правого стержня, найдена сила натяжения самой правой нити – 0,5 балла,
2. Правильно найдены силы натяжения следующих нитей, построено рекуррентное правило нахждения сил натяжения – 0,5 балла,
3. Сила натяжения левой нити получена как сумма конечной (но очень длинной) геометрической прогрессии – 0,5 балла,
4. Прогрессия правильно просуммирована, слагаемое $\left(1/5\right)^{2018}$ отброшено как чудовищно малое число. Правильные вычисления – 0,5 балла

3. Работу, которую нужно совершить найдем как изменение потенциальной энергии воды и цилиндра при его вытаскивании из воды.

Кювета в разрезе, перпендикулярном высоте цилиндра, показана на рисунке, из которого заключаем, что объем налитой в кювету воды V равен разности объема параллелепипеда с основанием $2R\times 2R$ и высотой h. То есть

$$V = \left(4-\pi\right)R^2h$$



Минимальная высота Δh, на которую нужно поднять цилиндр, чтобы он полностью вытащить его из воды (см. рисунок), находится из очевидного соотношения

$$\left(4-\pi\right)R^2h = 2R\Delta hh \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h = \frac{\left(4-\pi\right)}{2}R$$

Поэтому потенциальная энергия цилиндра возрастает на величину

$$\Delta\Pi_ц = Mg\Delta h = 3\rho\pi R^2hg\frac{\left(4-\pi\right)}{2}R = \frac{3\pi\left(4-\pi\right)}{2}\rho ghR^3$$

Центр тяжести воды находился в центре сечения цилиндра, а будет находиться на высоте $\Delta h/2$ от дна кюветы. Поэтому потенциальная энергия воды уменьшится на величину

$$\Delta\Pi_в = mg\left(R-\frac{\Delta h}{2}\right) = \rho\left(4-\pi\right)R^2hg\left(R-\frac{\left(4-\pi\right)}{4}R\right) = \frac{\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4}$$

Поэтому работа, которую необходимо совершить для вытаскивания цилиндра из воды (равная увеличению потенциальной энергии системы цилиндр-вода), равна

$$A = \Delta\Pi_ц - \Delta\Pi_в = \frac{3\pi\left(4-\pi\right)}{2}\rho ghR^3 - \frac{\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4} = \frac{5\rho\left(4-\pi\right)\pi R^3hg}{4}$$

Критерии оценки задачи

1. Сформулирована основная идея решения – нахождение работы через изменение потенциальной энергии воды и цилиндра – 0,5 балла,
2. Правильно найдено изменение потенциальной энергии цилиндра – 0,5 балла,
3. Правильно найдено изменение потенциальной энергии воды – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Поскольку колеса имеют одинаковые размеры и не проскальзывают, они вращаются с одинаковыми угловыми скоростями ω, которые определяются соотношением:

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad (1)$$

где v - скорость велосипеда, R - радиус колеса. Поэтому угол между радиусами-векторами камней $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ относительно центров колес в любой момент времени составляет $90°$ (см. рисунок 1).

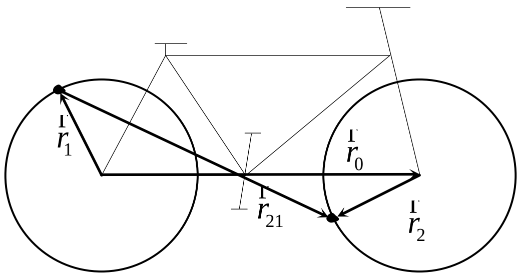


Рисунок 1.

Рудиус-вектор второго камня относительно первого $\vec{r}_{21}$ можно найти из очевидного векторного равенства

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 . \qquad (2)$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор центра переднего колеса относительно центра заднего. Так как угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ всегда равен $90°$, то вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ имеет длину $\sqrt{2}R$ (R - радиус колес), и вращается с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости колес. Таким образом, радиус-вектор второго камня относительно первого можно найти как сумму вектора $\vec{r}_0$ и вектора, имеющего длину $\sqrt{2}R$ и вращающегося с угловой скоростью (1). Сложение этих векторов показано на рисунке 2, причем концы векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_{21}$ лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце вектора $\vec{r}_0$.

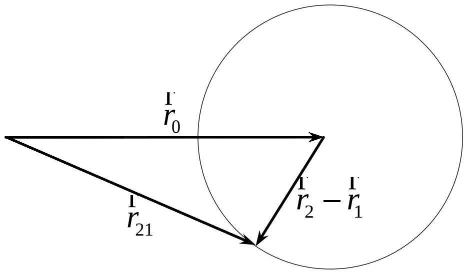


Рисунок 2.

Из рисунка 2 следует, что минимальную длину вектор $\vec{r}_{21}$ (2) имеет в тот момент времени, когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен противоположно вектору $\vec{r}_0$, максимальную – когда вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлен так же, как и вектор $\vec{r}_0$. Поэтому

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = R\left(3-\sqrt{2}\right); \qquad r_{21}^{\max} = 3R + \sqrt{2}R = R\left(3+\sqrt{2}\right)$$

Вычитание векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, отвечающее этим двум случаям, показано на рисунке 3а и 3б соответственно. Поэтому длина вектора $\vec{r}_{21}$ будет минимальна, когда вектор $\vec{r}_2$

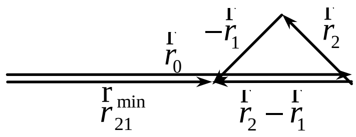


Рисунок 3а.

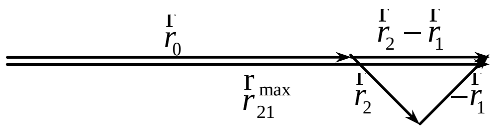


Рисунок 3б.

повернется на угол $5\pi/4$, а максимальна – на угол $\pi/4$ по сравнению с начальным положением. Отсюда находим моменты времени $t^{\min}$ и $t^{\max}$, когда расстояние между камнями достигает минимального и максимального значения

$$t^{\min} = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi R}{4v}, \qquad t^{\max} = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi R}{4v}.$$

Критерии оценки задачи

1. Сформулирована основная идея решения – нахождение расстояния между камнями как функция времени и его минимизация – 0,5 балла,
2. Правильно найдено расстояние между камнями как функция времени – 0,5 балла,
3. Определено (и обосновано) такое положение камней, при котором расстояние между ними минимально – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ для времени и минимального расстояния между камнями – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Обычно, когда рассматривают принципы работы тепловой машины, считают, что температуры нагревателя и холодильника в процессе отдачи или получения тепла не изменяются. Это верно для бесконечно больших теплоемкостей нагревателя и холодильника. Если же теплоемкости этих тел конечны, необходимо учитывать, что их температуры в процессе работы машины будут изменяться. Очевидно, что, в конце концов, температуры нагревателя и холодильника сравняются. Действительно, в процессе работы машины рабочее тело берет некоторое количество теплоты у нагревателя, часть его превращает в работу, оставшуюся часть передает холодильнику. Другими словами, происходит теплообмен между горячим нагревателем и холодным холодильником, но с одновременным «уходом» части энергии из этой системы тел в виде механической работы. Учтем этот «уход» в уравнениях теплового баланса.

Пусть в какой-то момент времени температура нагревателя равна T_1, холодильника - T_2. Поскольку нужно найти минимальную температуру тел, необходимо «увести» из системы максимальную работу. Поэтому проведем на этих телах цикл Карно. Возьмем малое количество теплоты δQ у нагревателя (чтобы его температура практически не изменилась). Поскольку кпд цикла Карно при температурах нагревателя и холодильника T_1 и T_2, равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{1}$$

то работа двигателя составит

$$\delta A = \eta \delta Q = \delta Q - \frac{T_2}{T_1}\delta Q \tag{2}$$

Поэтому более холодному телу будет передано количество теплоты δQ_1, равное

$$\delta Q_1 = \delta Q - \delta A = \frac{T_2}{T_1}\delta Q \tag{3}$$

Таким образом, тепловой баланс в системе тел с учетом «ухода» из системы механической работы выглядит так: если горячее отдает количество теплоты δQ, холодное получает количество теплоты δQ_1 (3).

Найдем теперь, как изменятся температуры тел после осуществления рассмотренного процесса. Так как нагреватель отдает количество теплоты δQ, его температура уменьшится на величину $\delta Q / C$ (C - теплоемкость нагревателя) и составит

$$T_1' = T_1 - \frac{\delta Q}{C} \tag{4}$$

Температура холодильника возрастет на величину $\delta Q_1 / 2C$ ($2C$ - теплоемкость холодильника) и составит

$$T_2' = T_2 + \frac{T_2}{T_1}\frac{\delta Q}{2C} \tag{5}$$

Возводя уравнение (5) в квадрат и учитывая, что δQ - малая величина, и потому слагаемое, содержащее δQ^2, является малым, и им можно пренебречь, получим

$$\left(T_2'\right)^2 \approx \left(T_2\right)^2 + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q}{C} \tag{6}$$

Перемножим теперь почленно формулы (4) и (6). Имеем

$$T_1'\left(T_2'\right)^2 = T_1\left(T_2\right)^2 - \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \left(T_2\right)^2\frac{\delta Q}{C} + \frac{\left(T_2\right)^2}{T_1}\frac{\delta Q^2}{C^2} \approx T_1\left(T_2\right)^2 \tag{7}$$

(в формуле (7) снова отброшено слагаемое, квадратичное по величине δQ). Равенство (7) означает, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника. А поскольку этот результат будет иметь место при любых температурах тел, то он будет иметь место и для конечной температуры нагревателя и холодильника T_x:

$$3T\left(T\right)^2 = T_x\left(T_x\right)^2 = T_x^3 \qquad \Rightarrow \qquad T_x = \sqrt[3]{3}\,T = 1,442\,T \tag{8}$$

Таким образом, в результате работы рассмотренной тепловой машины в течение длительного времени температуры нагревателя и холодильника сравняются и станут равными величине (8).

Если бы энергия не уходила из системы, то в результате теплообмена между нагревателем и холодильником их температуры также сравнялись бы, но установившаяся температура была бы больше величины (8). Установившуюся в этом случае температуру тел T_y можно найти из «обычного» уравнения теплового баланса: количество теплоты, отданное нагревателем, равно количеству теплоты, полученному холодильником, при этом указанные количества теплоты можно стандартным образом связать с начальной и конечной температурами тел и их теплоемкостями:

$$C\left(3T-T_y\right)=2C\left(T_y-T\right) \qquad (9)$$

Из формулы (9) получаем

$$T_y=\frac{5}{3}T=1,667\,T \qquad (10)$$

Энергия, связанная с разностью установившихся температур T_y-T_x (10), (11), и есть полная механическая работа, совершенная двигателем до того момента, как температуры нагревателя и холодильника сравняются, и двигатель больше не сможет совершать работу. Поскольку суммарная теплоемкость тел равна $3C$, то эта работа равна

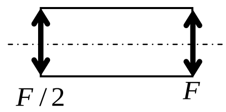
$$A=3C\cdot\left(T_y-T_x\right)=CT\left(5-3\sqrt[3]{3}\right)=0,675CT$$

Критерии оценки задачи

1. Сформулирована основная идея решения – температура системы будет минимальной при отведении из нее максимальной работы – между телами нужно организовать цикл Карно – 0,5 балла,
2. Понято, что поскольку температуры тел меняются в процессе работы двигателя, КПД цикла Карно меняется – нужно строить бесконечно много циклов с бесконечно малыми передачами тепла, а затем суммировать работы – 0,5 балла,
3. Доказано, что в рассмотренном процессе не меняется произведение температуры нагревателя на квадрат температуры холодильника – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ для работы и искомой температуры – 0,5 балла

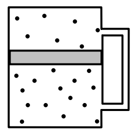
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс, 2017-2018 учебный год, комплект 4

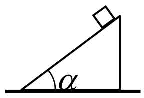


1. Две собирающие линзы одинакового диаметра вставлены в трубу с зачерненными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой, и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу падает пучок параллельных лучей одинаковой интенсивности сначала слева, а потом справа. Найти отношение освещенностей экрана, расположенного соответственно справа и слева от трубы. **Указание**. Освещенностью поверхности называется отношение световой энергии, падающей на малый элемент поверхности, к его площади.

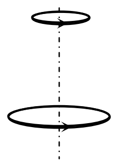
2. Граната брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. В верхней точке своей траектории граната разрывается на множество осколков, которые разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение интервала времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?



3. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен подвижным поршнем массой m и площадью S на два отсека. Под действием силы тяжести поршень медленно опускается. При этом давления газа в сосуде остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа по трубке малого объема. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: T в верхнем и $1,2T$ в нижнем. Найти давление газа в отсеках.



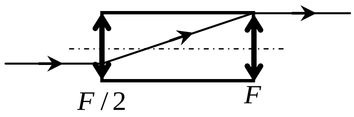
4. На вершину клина, одна грань которого наклонена под углом α, а вторая перпендикулярна горизонтальной поверхности, кладут маленькое тело массой m (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и клином равен k, трение между клином и поверхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли опрокидывание клина? При какой массе клина?



5. Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.

Решения

1. Чтобы пучок оставался параллельным, у линз должны совпадать фокусы. При падении лучей на левую линзу на правую линзу попадут лучи, идущие на расстоянии, не большем половины радиуса левой линзы. Поэтому на площадь, равную площади падающего пучка, придется одна четверть его энергии (остальная попадет на боковые стенки трубы). При падении лучей справа, луч, идущий через край правой линзы, окажется на расстоянии, равном половине радиуса левой. Поэтому вся энергия пучка придется на вчетверо меньшую площадь. Поэтому



$$\frac{W_{правый\ экран}}{W_{левый\ экран}} = \frac{1}{16}$$

Критерии оценки задачи

1. Сформулирована главная идея решения – сравнение энергии, падающей на единицу площади экрана, при падении света слева и справа. Доказано, что фокусы линз лежат в одной точке – 0,5 балла
2. Доказано, что фокусы линз лежат в одной точке – 0,5 балла
3. Правильно найдены освещенности экрана при падении света слева и справа (с учетом поглощения части потока внутренними стенками трубы – 0,5 балла
4. Доведена до правильного ответа - 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Граната поднимается на высоту

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

В этот момент времени граната взрывается и осколки разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Пусть скорости осколков сразу после взрыва равна v. Тогда, очевидно, осколки будут падать на землю в течение времени

$$\Delta t = \frac{2v}{g} \qquad (*)$$

Действительно, первым на землю упадет осколок, летящий после взрыва вертикально вниз, последним – вертикально вверх. А поскольку последний вернется в точку взрыва через время (*) после взрыва, а затем в точности повторит движение первого, то время (*) и будет интервалом между падениями на землю последнего и первого. Из формулы (*) находим скорости осколков сразу после взрыва

$$v = \frac{g\Delta t}{2}$$

Чтобы найти время падения на землю первого осколка применим к нему закон равноускоренного движения

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} \qquad (**)$$

где t - время падения на землю первого осколка. Решая квадратное уравнение (**), находим

$$t = \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} - \frac{\Delta t}{2}$$

Критерии оценки задачи

1. Правильно найдена высота, на которой произойдет взрыв – 0,5 балла
2. Доказана формула (*) – 0,5 балла,
3. Правильно записано уравнение для нахождения времени падения на землю первого осколка – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Поскольку поршень движется медленно, то он в любой момент времени находится в равновесии. Поэтому

$$mg = \left(p_н - p_в\right)S \qquad (*)$$

где $p_н$ и $p_в$ - давления газа снизу и сверху от поршня, S - площадь сосуда. Поскольку давления и температуры газов над и под поршнем не изменяются, то не изменяются и концентрации газов. А поскольку изменения объемов верхнего и нижнего отсеков одинаковы по величине, и все молекулы из нижнего отсека переходят в верхний, то концентрации газов над и под поршнем одинаковы. Используя далее основное уравнение МКТ $p = nkT$, где n - концентрация молекул газа, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, получим из (*)

$$n = \frac{mg}{kS\left(T_н - T_в\right)} = \frac{mg}{0,2kST} = \frac{5mg}{kST}$$

Теперь из основного уравнения МКТ находим давления

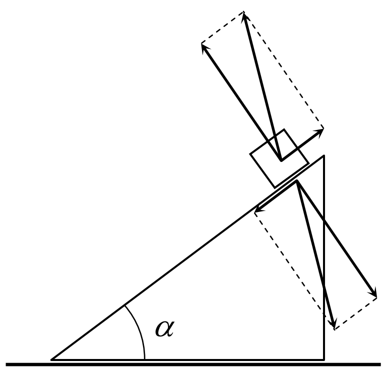
$$p_н = nkT_н = \frac{5mgT_н}{ST} = \frac{6mg}{S}, \qquad p_в = nkT_в = \frac{5mgT_в}{ST} = \frac{5mg}{S}$$

Критерии оценки задачи

1. Правильно сформулирована идея решения – поршень все время находится в равновесии, при его медленном перемещении газ так перетекает, чтобы сохранить это условие – 0,5 балла
2. Доказано, что концентрация газа над и под поршнем – одинакова – 0,5 балла,
3. Из условия перетекания газа по трубке эта концентрация правильно найдена – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Если коэффициент трения таков, что тело покоится на наклонной грани клина ($k > \mathrm{tg}\,\alpha$), то клин не может опрокинуться. Действительно, в этом случае сила, действующая на тело со стороны клина, направлена вертикально вверх и равна по величине силе тяжести тела (тело покоится!). Поэтому сила, действующая на клин со стороны тела, направлена вертикально вниз и не может опрокинуть прямоугольный клин. Если же тело движется с ускорением, направленным вниз вдоль плоскости, то ситуация другая. В этом случае нормальная компонента силы реакции плоскости равна $mg\cos\alpha$ (m - масса тела), а компонента силы реакции, направленная вдоль плоскости (сила трения) меньше, чем $mg\sin\alpha$. А это значит, что суммарная сила, действующая на тело со стороны клина, направлена левее вертикали (см. рисунок), а на клин со стороны тела (противоположная и равная по величине первой силе) – правее. Следовательно, эта сила может опрокинуть клин.



Найдем «границу» опрокидывания клина через вершину прямого угла. В момент опрокидывания сила реакции будет сосредоточена в вершине, поэтому для опрокидывания клина момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела (сила реакции + трения), должен стать больше момента силы тяжести (относительно вершины прямого угла). Пусть ширина нижней грани клина равна a. Тогда момент силы тяжести относительно вершины прямого угла равен

$$M_{mg} = \frac{1}{3}Mga$$

Момент суммарной силы, действующей на клин со стороны тела, можно вычислить отдельно для сил реакции и трения, а затем сложить. Имеем

$$M_{тр} = kmg\cos\alpha \cdot a\sin\alpha$$

где $a\sin\alpha$ - плечо силы трения относительно вершины прямого угла. Аналогично для момента силы реакции имеем

$$M_{реак} = -mg\cos\alpha \cdot a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = -mga\sin^2\alpha$$

где $a\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ - плечо силы реакции относительно вершины прямого угла (знак «-» - потому что сила реакции «вращает» клин по часовой стрелке относительно вершины прямого угла). Отсюда заключаем, что клин перевернется, если

$$mga\sin^2\alpha \geq kmga\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{3}Mga$$

Или

$$m \geq \frac{M}{3\sin\alpha\left(\sin\alpha - k\cos\alpha\right)}$$

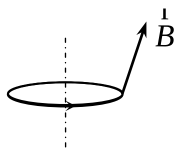
Критерии оценки задачи

1. Правильно сформулирована идея решения – при движении тела вила взаимодействия клина и тела направлена не вертикально и может перевернуть клин – 0,5 балла
2. Найдена сила взаимодействия клина и тела и вычислен ее момент относительно вершины прямого угла в тот момент, когда тело находится на верхушке клина – 0,5 балла,
3. Проведено сравнение момента этой силы и момента силы тяжести – 0,5 балла,
4. Получен правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Найдем индукцию магнитного поля, созданного кольцом радиуса $2R$ в области второго кольца, а затем по закону Ампера найдем силу взаимодействия колец.

Индукция магнитного поля кольца на его оси направлена вдоль оси, а в точках, расположенных на некотором расстоянии от оси (т.е. в области второго кольца) под некоторым углом к оси (см. рисунок). Используя далее, закон взаимодействия магнитного поля и тока (закон Ампера), заключаем, что суммарная сила Ампера, действующая на кольцо радиуса R со стороны магнитного поля второго кольца, направлена вдоль оси колец и определяется составляющей вектора $\vec{B}$, направленной перпендикулярно оси

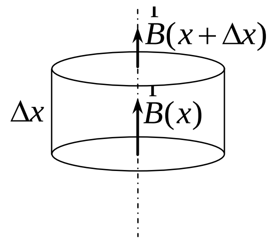


$$F = 2\pi RIB_{\perp} \tag{1}$$

где $B_{\perp}$ - составляющая вектора индукции, перпендикулярная оси кольца. Найдем $B_{\perp}$.

Используем известное выражение для индукции магнитного поля кольца на его оси на расстоянии x от его плоскости

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\left(2R\right)^2}{\left(\left(2R\right)^2 + x^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$



где I - ток в кольце, $2R$ - его радиус. Рассмотрим вспомогательную цилиндрическую поверхность соосную оси кольца, с радиусом, равным радиусу второго кольца R, и малой высотой Δx (см. рисунок). Т.к. величина индукции на оси кольца уменьшается с ростом расстояния от кольца, то поток вектора магнитной индукции через верхнее основание цилиндрической поверхности меньше потока через нижнее. А поскольку поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю (отсутствуют магнитные заряды), то разница потоков через основания

$$\Delta\Phi = \pi R^2\left(B\left(x\right) - B\left(x + \Delta x\right)\right) \tag{3}$$

(πR^2 - площадь оснований цилиндра) равна потоку вектора магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра

$$\Delta\Phi = B_{\perp}2\pi R\Delta x \tag{4}$$

где $2\pi R\Delta x$ - площадь его боковой поверхности. Из формул (3), (4) находим

$$B_{\perp} = -\frac{R}{2}\frac{\left(B\left(x + \Delta x\right) - B\left(x\right)\right)}{\Delta x} \tag{5}$$

Т.к. Δx мало, то выражение (5) сводится к производной величины индукции на оси кольца (2) по x. Дифференцируя функцию (2), находим по формулам (5), (1) в пределе $x ?\ R$

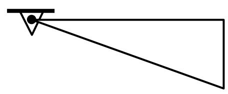
$$F = 6\pi\mu_0 \frac{I^2 R^4}{x^4}.$$

Критерии оценки задачи

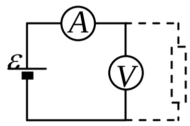
1. нахождение индукции поля одного из токов на оси этого тока – 0,5 балла
2. понимание, что сила определяется проекцией индукции, перпендикулярной оси – плюс 0,5 балла,
3. нахождение перпендикулярной проекции из условия нулевого потока через замкнутую поверхность – плюс 0,5 балла,
4. правильный ответ – плюс 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс. Комплект 1
2017-2018 учебный год

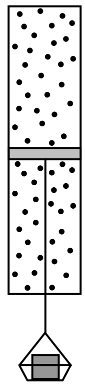


1. Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг другу, как 1:2 подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рисунок). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого. Масса треугольника - m.

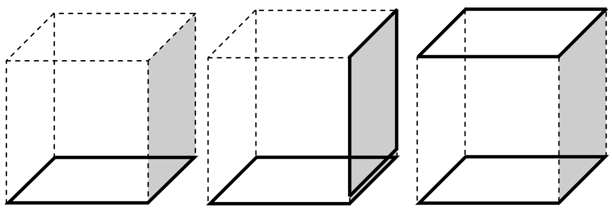


2. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

3. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 - известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

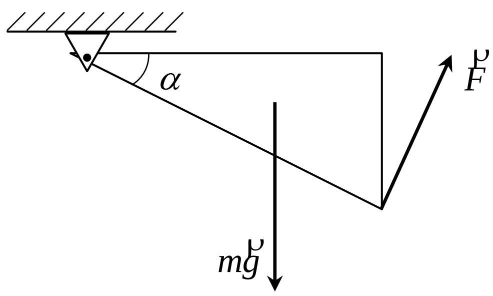


4. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень легкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена легкая чашка. В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоемкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?



5. Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?

Решения



1. Чтобы треугольник был в равновесии момент искомой силы $\vec{F}$ относительно шарнира должен быть равен по величине моменту силы тяжести. Поэтому сила F будет минимальна, если будет максимальным ее плечо относительно шарнира. Следовательно, внешнюю силу нужно приложить к точке треугольника, максимально удаленной от шарнира, и направить перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с шарниром. То есть внешняя сила $\vec{F}$ должна быть приложена к вершине угла $\pi/2-\alpha$ и направлена перпендикулярно гипотенузе (см. рисунок).

Для того чтобы найти силу F воспользуемся условием вторым равновесия. Причем моменты сил будем вычислять относительно шарнира – это позволит сделать момент неизвестной силы реакции шарнира равным нулю.

Пусть длина меньшего катета треугольника равна a. Тогда длина большего катета - $2a$, а дина гипотенузы - $\sqrt{5}a$. Поэтому момент силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен $M_F=\sqrt{5}Fa$. Найдем момент силы тяжести. Центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану на части, относящиеся друг к другу, как 2:1, то плечо силы тяжести относительно шарнира равно двум третьим частям его горизонтального катета. Поэтому $M_{mg}=(2/3)mg2a=(4/3)mga$. Следовательно, условие моментов для треугольника дает

$$\sqrt{5}Fa=\frac{4}{3}mga.$$

Отсюда находим

$$F=\frac{4}{3\sqrt{5}}mg\ .$$

Критерии оценки задачи

1. Понято и обосновано к какой точке треугольника нужно приложить минимальную необходимую для его удержания силу – 0,5 балла,
2. Правильно расставлены силы, сила тяжести приложена к точке пересечения медиан – 0,5 балла,
3. Правильно написано условие равновесия – условие моментов относительно шарнира – 0,5 балла,
4. Правильное решение уравнения (условия равновесия) – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. По закону Ома для замкнутой цепи имеем (в случае цепи без дополнительного сопротивления) находим ток в цепи (который равен току через амперметр)

$$I=\frac{\varepsilon}{r+r_A+r_V}$$

где r - внутреннее сопротивление источника, r_A - сопротивление амперметра, r_V - сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V=Ir_V=\frac{\varepsilon r_V}{r+r_A+r_V}=\varepsilon-I\left(r+r_A\right) \qquad (*)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U_V'=\varepsilon-I'\left(r+r_A\right)$$

Но по условию показания амперметра увеличиваются вдвое ($I'=2I$), а вольтметра вдвое уменьшаются ($U_V'=U_V/2$). Отсюда

$$\frac{U_V}{2}=\varepsilon-2I\left(r+r_A\right) \qquad (**)$$

Выражая теперь величину $I\left(r+r_A\right)$ из формулы (*) и подставляя ее в формулу (**), получим

$$\frac{U_V}{2} = \varepsilon - 2\left(\varepsilon - U_V\right)$$

Или

$$U_V = \frac{2}{3}\varepsilon$$

Критерии оценки задачи

1. Сформулирована правильная идея решения – нахождение напряжения на вольтметре через ток в цепи – 0,5 балла,
2. Правильное комбинирование этих формул в первом и втором случае – 0,5 балла,
3. Правильно получено уравнение, связывающего показания вольтметра и ЭДС – 0,5 балла,
4. Правильные вычисления – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Поскольку при прямолинейном движении мгновенное ускорение тела определяется как

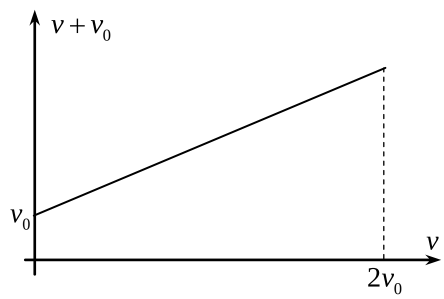
$$a = \frac{v_к - v_н}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

где $v_к$ и $v_н$ скорость тела в начале и в конце малого интервала времени Δt, то изменение скорости тела за малый интервал времени Δt равно $\Delta v = a\Delta t$. Если просуммировать изменения скорости тела за все малые интервалы времени, но которые можно разбить полное время движения, получится полное изменение скорости, которая из-за равенства нулю начальной скорости равна конечной скорости тела

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n$$

где a_n - ускорение тела внутри малого интервала времени Δt_n. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдем

$$\frac{1}{a_0 v_0}\sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0\right) = \sum_n \Delta t_n$$



где v_n - значение внутри n-ого интервала времени Δt_n. Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Сумма в левой части имеет графический образ как площадь под графиком зависимости $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рисунок), получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}$$

Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – суммирование малых интервалов времени и $\Delta v_n / a_n$ – 0,5 балла,
2. Суммирование осуществляется графически (или через соответствующий интеграл) – 0,5 балла,
3. Правильно построен нужный график $f(v) = v + v_0$ от v – 0,5 балла,
4. Правильно найдена площадь под графиком, получен правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Поскольку поршень хорошо проводит тепло, можно считать, что температура газа в отсеках одинакова. После того как на чашку положили тело, и тело вместе с поршнем опустилось вниз, потенциальная энергия тела перешла во внутреннюю энергию газа. Поэтому, если поршень опустился на величину Δx вниз, закон сохранения энергии дает

$$mg\Delta x = \frac{3}{2}p_в S\left(l + \Delta x\right) + \frac{3}{2}p_н S\left(l - \Delta x\right) - \frac{3}{2}2p_0 Sl \qquad (*)$$

где $2l$ - длина сосуда, $p_н$ и $p_в$ - давления газа в верхней и нижней частях сосуда. С другой стороны, из условия равновесия поршня имеем

$$mg = (p_н - p_в)S \qquad (**)$$

Кроме того, внутренние энергии газа над и под поршнем равны. Поэтому

$$p_в(l+\Delta x) = p_н(l-\Delta x) \qquad (***)$$

Исключая из системы уравнений (*)-(***) давления газа, получим уравнение относительно Δx

$$5mg\Delta x^2 + 6p_0Sl\Delta x - 3mgl^2 = 0$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{\sqrt{9p_0^2S^2 + 15m^2g^2} - 3p_0S}{5mg}\right)l$$

При $m \to \infty$ поршень не ляжет на дно сосуда, даже несмотря на бесконечную силу тяжести. Это связано с тем, что при большой массе груза даже небольшое его смещение приводит к высвобождению большой потенциальной энергии и, соответственному сильному нагреванию газа в сосуде, возрастанию его давления и увеличению разности давлений между нижним и верхним газами. Пренебрегая в случае большой массы величиной p_0S по сравнению с mg, получим

$$\Delta x = \sqrt{\frac{3}{5}}l$$

Критерии оценки задачи

1. Правильное использование условия равновесия поршня в начальном и конечном состоянии – 0,5 балла,
2. Правильное использование закона сохранения энергии с переходом потенциальной энергии груза во внутреннюю энергию газа – 0,5 балла,
3. Получение правильного уравнения для смещения поршня из условия равновесия и закона сохранения энергии – 0,5 балла
4. Правильное решение уравнения и обоснование, почему поршень не ляжет на дно цилиндра даже при бесконечно большой массе – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Пропустим через первый виток ток I. Тогда поток магнитного поля через него будет равен

$$\Phi = LI \qquad (1)$$

где I - индуктивность первого витка. Поскольку магнитных зарядов не существует, суммарный поток через любую замкнутую поверхность, в состав которой входит наш виток (и в частности, через куб, для которого рассматриваемый виток является одной гранью) будет равен нулю. Поэтому

$$\Phi = 4\Phi_{12} + \Phi_{16} \qquad (2)$$

где Φ_{12} - поток магнитного поля через соседнюю грань куба, Φ_{16} - поток магнитного плоя через противоположную грань. Поскольку магнитный поток через сверхпроводящий виток должен быть равен нулю, то при поднесении его к рассматриваемому витку в нем индуцируется ток I_1, создающий точно такой же (но противоположный) поток через самого себя. Ток I_1 создает магнитный поток через основной виток, который во столько же раз меньше потока Φ, во сколько раз ток I_1 мегьше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток при поднесении к нему сверхпроводящего витка будет равен

$$\Phi - \frac{I_1}{I}\Phi_{12} = \Phi - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi^2}\right) \qquad (3)$$

С другой стороны, этот поток по определению равен L_1I. Отсюда получаем

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}} \qquad (4)$$

В результате из формулы (2) находим

$$\Phi_{16} = \Phi\left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right) \qquad (5)$$

Если теперь мы уберем боковой виток и разместим сверхпроводящий виток на противоположной грани куба, то в нем возникнет такой ток I_2, который, с одной стороны, будет компенсировать магнитный поток Φ_{16} основного тока через самого себя, а с другой создаст поток через основной виток, во столько же раз меньший потока Φ_{16} во сколько ток I_2 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток в этом случае равен

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{I_2}{I}\Phi_{16} = \Phi - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi^2}\right) \qquad (6)$$

Но этот поток по определению равен $L_2 I$, где L_2 - индуктивность основного витка в присутствии сверхпроводящего витка на противоположной грани. Поэтому из предыдущей формулы получаем

$$L_2 = L\left(1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right) = 0,96 \text{ мГн}$$

Критерии оценки задачи

1. Использование и обоснование условия, что поток магнитного поля через первый контур равен сумме потоков через четыре соседних и противоположную грани куба – 0,5 балла,
2. Правильное использование условия, что поток через сверхпроводящий виток не может измениться – 0,5 балла,
3. Правильно найдены потоки магнитного поля через соседнюю и противоположную грани куба – 0,5 балла
4. Правильный ответ, правильное вычисление – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.