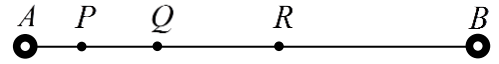


2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс, комплект 1

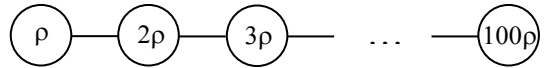
Задания

1. Между городами A и B есть три деревни P , Q и R , причем для расстояний между населенными пунктами справедливы такие соотношения: $AP : PQ : QR : RB = 1 : 2 : 3 : 4$. Автомобиль проехал между городами A и B так, что его скорость между каждыми ближайшими населенными пунктами была постоянной, а времена прохождения отрезков AP , PQ , QR и RB относятся друг к другу как $4 : 3 : 2 : 1$. Найти среднюю скорость автомобиля на первой половине пути, если его скорость на отрезке RB равнялась v .



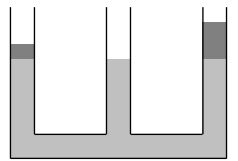
2. Тело падает с некоторой высоты без начальной скорости. В некоторый момент времени оно оказалось на высоте h над землей, а спустя интервал времени Δt на высоте $h/4$. С какой высоты падало тело?

3. Сто тел одинакового объема V имеют плотности ρ , 2ρ , \dots , 100ρ . Тела связывают веревками так, как показано на рисунке, и бросают в воду. При какой максимальной плотности ρ все тела не утонут в воде? Плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.



4. В калориметр, содержащей некоторое количество воды с неизвестной температурой, положили кусок льда с температурой $t_1 = -50^\circ \text{C}$. После установления равновесия весь лед превратился в воду с температурой $t_0 = 0^\circ \text{C}$. После того как в калориметр положили еще восемь таких же кусков льда с той же температурой $t_1 = -50^\circ \text{C}$, вся вода превратилась в лед с температурой $t_0 = 0^\circ \text{C}$. Найти начальную температуру воды. Удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$.

5. Имеются три одинаковых цилиндрических сосуда, в которое налито некоторое количество воды. Поверх воды в левый и правый сосуд аккуратно наливают слой масла – в левый сосуд толщиной $h = 3 \text{ см}$, в правый $3h$. На сколько изменятся уровни жидкости в левом, среднем и правом сосудах после установления равновесия? Известно, что при налипании масла вода из левого и правого сосудов маслом полностью не вытесняется. Плотность масла $\rho_0 = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.



Ответы и решения

1. Пусть $AP = l$. Тогда $PQ = 2l$, $QR = 3l$, $RB = 4l$. Пусть время, затраченное на прохождение отрезка RB , равно t . Тогда, во-первых, времена, затраченные на прохождение остальных участков пути, равны: на QR – $2t$, на PQ – $3t$, на AP – $4t$, а во-вторых,

$$v = \frac{4l}{t}$$

Средняя скорость машины на первой половине пути равна отношению длины половины пути ($5l$) ко времени, затраченному на ее прохождение. Первая половина пути состоит из участка AP , участка PQ и двух третей участка QR . Поэтому на прохождение первой половины пути автомобиль затратит следующее время

$$t_0 = 4t + 3t + \frac{2}{3}2t = \frac{25}{3}t$$

Отсюда получаем для средней скорости автомобиля на первой половине пути

$$v_{\text{cp}} = \frac{5l}{(25/3)t} = \frac{3l}{5t} = \frac{3}{20}v.$$

2. Основная идея решения задачи заключается в том, что, рассматривая движение тела от точки на высоте h до точки на высоте $h/4$, можно найти его скорость на высоте h , а потом, например, на основе закона сохранения энергии – высоту начальной точки над землей.

Законы равноускоренного движения для движения от точки на высоте h до точки на высоте $h/4$ дают

$$\frac{3h}{4} = v_0 \Delta t + \frac{g \Delta t^2}{2}$$

Отсюда находим

$$v_0 = \frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}$$

Теперь по закону сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl$$

Находим высоту l начальной точки над точкой, находящейся на высоте h над землей

$$l = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(\frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2}{2g}$$

А затем и искомую высоту H начальной точки над землей

$$H = h + l = h + \frac{\left(\frac{3h}{4\Delta t} - \frac{g\Delta t}{2}\right)^2}{2g}$$

3. Тела не утонут в воде, если средняя плотность ста шаров будет меньше плотности воды. Найдем среднюю плотность шаров. По определению имеем

$$\rho_{cp} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{100}}{100V} = \frac{\rho(1 + 2 + \dots + 100)}{100}$$

Сумму всех чисел в скобках можно вычислить, если сложить первое с последним ($1 + 100 = 101$), второе с предпоследним ($2 + 99 = 101$), ... пятидесятое с пятьдесят первым ($50 + 51 = 101$). Поскольку таких пар 50, а сумма чисел каждой пары – 101, то

$$1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$$

Поэтому $1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101$. Отсюда находим среднюю плотность тела составленного из ста шаров

$$\rho_{cp} = \frac{101\rho}{2}$$

Тела не утонут в воде, если

$$\frac{101\rho}{2} \leq \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho \leq \frac{2\rho_0}{101} = 19,8 \text{ кг/м}^3.$$

4. Пусть масса льда – m , масса воды – M , искомая температура воды – t_2 . Тогда уравнение теплового баланса для опускания в калориметр одного куска льда дает

$$c_{\lambda} m (t_0 - t_1) + \lambda m = c_{\epsilon} M (t_2 - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{m}{M} \left(\frac{c_{\lambda} (t_0 - t_1) + \lambda}{c_{\epsilon}} \right)$$

Отношение масс куска льда и воды в калориметре найдем, используя второе условие

$$c_{\lambda} 8m (t_0 - t_1) = \lambda (M + m) \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{\lambda}{8c_{\lambda} (t_0 - t_1) - \lambda}$$

Отсюда

$$t_2 = t_0 + \frac{\lambda (c_{\lambda} (t_0 - t_1) + \lambda)}{c_{\epsilon} (8c_{\lambda} (t_0 - t_1) - \lambda)} = 70^{\circ}\text{C}$$

5. С точки зрения давления в жидкости наливание в сосуд слоя масла толщиной h эквивалентно наливанью слоя воды толщиной

$$\frac{\rho_0 h}{\rho_1}.$$

Поэтому наливание в систему сосудов слоя масла толщиной $4h$ (в левый и правый сосуды) эквивалентно тому, что мы нальем слой воды толщиной

$$h_1 = \frac{4\rho_0 h}{\rho_1}$$

Но если бы мы налили такое количество воды, она распределилась бы равномерно по трем сосудам. Учитывая, что в среднем сосуде будет только вода (по условию масло полностью воду из левого и правого сосуда не вытесняет), то уровень воды в нем поднимется на величину

$$\Delta h_{cp} = \frac{4\rho_0 h}{3\rho_1} = 3,6 \text{ см.}$$

При этом давление в жидкости (около дна сосуда) возрастет на величину

$$\Delta p = \rho_1 g h_{cp} = \frac{4}{3} \rho_0 g h \quad (*)$$

Изменение уровня жидкости в левом и правом коленах сосуда найдем из условия увеличения давления в этих сосудах на эту величину.

В левом сосуде находится слой масла толщиной h , который обеспечивает дополнительное давление $\rho_0 g h$

Поэтому для увеличения давления на $(4/3)\rho_0 g h$ в левый сосуд должна войти дополнительная вода, дающая давление около дна сосуда $(1/3)\rho_0 g h$, т.е. слой воды толщиной $(1/3)(\rho_0 / \rho_1)h$. Это значит, что уровень жидкости в левом колене увеличится на величину

$$\Delta h_{лев} = h + \frac{\rho_0}{3\rho_1} h = 3,9 \text{ см}$$

В правом сосуде появится дополнительный слой масла толщиной $3h$, который обеспечивает дополнительное давление

$$3\rho_0 g h$$

Поэтому чтобы давление около дна правого сосуда возросло на величину Δp (*) из правого сосуда должна уйти вода толщиной $(5/3)(\rho_0 / \rho_1)h$. Поэтому уровень воды в правом сосуде поднимется на величину

$$\Delta h_{прав} = 3h - \frac{5\rho_0}{3\rho_1} h = 7,5 \text{ см}$$

(проверка: сумма подъемов уровней жидкости во всех сосудах должна дать то, что налили, т.е. $4h$.

$$\Delta h_{лев} + \Delta h_{cp} + \Delta h_{прав} = h + \frac{\rho_0}{3\rho_1} h + \frac{4\rho_0 h}{3\rho_1} + 3h - \frac{5\rho_0}{3\rho_1} h = 4h$$

как и должно быть).

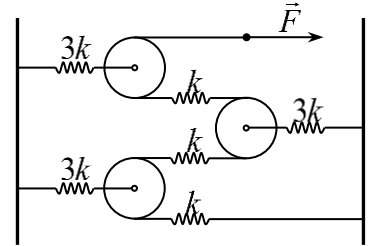
2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс, комплект 2

Задания

1. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\varepsilon = 6$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 3$ В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.

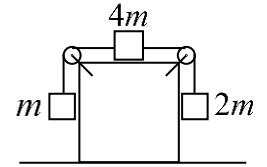
2. Два тела, расстояние между которыми l , начинают двигаться одновременно в одном направлении: первое из состояния покоя равноускоренно с ускорением a , второе, догоняющее первое, равномерно со скоростью v . При каком минимальном значении v , второе тело догонит первое?

3. Три одинаковые пружины с коэффициентами жесткости k связаны кусками невесомой нерастяжимой нити. Полученная нить переброшена через три невесомых блока, привязанных к вертикальным стенам с помощью одинаковых пружин с коэффициентами жесткости $3k$ (см. рисунок). На конец нити действуют силой F . Насколько переместится при этом конец нити?



4. Слононок и Мартышка измеряют длину Удава, который проползал мимо них. В тот момент, когда около них был хвост Удава, Мартышка побежала к его голове и, добежав, положила на землю в ту точку, где находилась голова Удава, банан. Затем она побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава (который продолжал ползти). Потом пришел Попугай и измерил расстояния от Слононка (который все время стоял на месте) до бананов в «попугаях». Эти расстояния оказались равны - 48 попугаев и 16 попугаев. Найти отношение скорости Мартышки к скорости Удава и длину Удава в попугаях.

5. На горизонтальной опоре находится куб, на котором укреплены два блока. Через блоки перекинута нить с грузами массами m , $4m$ и $2m$. Какой горизонтальной силой надо действовать на куб, чтобы он покоился? Трение между кубом и опорой отсутствует; коэффициент трения между верхним телом и кубом - k .



Ответы и решения

1. Очевидно, вольтметры неидеальные, поскольку в случае идеальности они должны были бы показывать $2/3$ от напряжения источника, а они показывают половину. Кроме того, из данных условия очевидно, что ток через центральное сопротивление не течет. Действительно, поскольку вольтметры V_1 и V_2 показывают половину напряжения источника, то потенциалы точек 2 и 3 одинаковы. Поэтому ток через центральное сопротивление не течет, его можно выбросить, а падения напряжения на резисторах и вольтметрах одинаковы. Поэтому сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов.

При выбрасывании одного вольтметра цепь принимает следующий вид (см. рисунок), причем сопротивление участка 1-2 равно

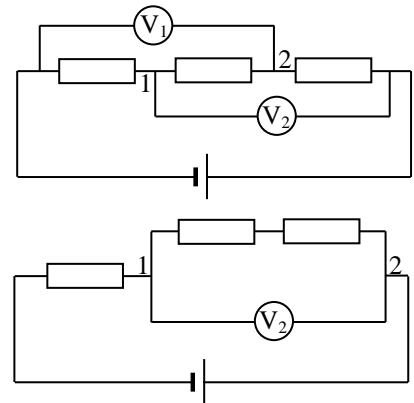
$\frac{2R}{3}$, поскольку сопротивление вольтметра равно сопротивлению резисторов. Поэтому напряжение на участке 1-2 составляет $2/5$ от напряжения источника и, следовательно,

$$V_2 = \frac{2}{5} \varepsilon = 2,4 \text{ В}$$

2. Зависимости координат тел от времени (начало координат находится в точке, откуда начало двигаться второе тело, ось x направлена вдоль движения тел) имеют вид

$$x_1(t) = l + \frac{at^2}{2}$$

$$x_2(t) = vt$$



Второе тело догонит первое, если для какого-то значения t выполнено условие

$$\frac{at^2}{2} - vt + l = 0 \quad (*)$$

или, другими словами, квадратное уравнение (*) имеет решение, т.е. его дискриминант неотрицателен

$$v^2 \geq 2al$$

Отсюда $v_{\min} = \sqrt{2al}$.

3. Сила натяжения нити, охватывающей блоки, одинакова во всех точках. Поэтому пружины с коэффициентами жесткости k будут растянуты на величину

$$\Delta x = \frac{F}{k}$$

На блоки со стороны этой нити действует сила $2F$. Поэтому пружины с жесткостью $3k$ будут растянуты на величину

$$\Delta x_1 = \frac{2F}{3k},$$

и за счет перемещения каждого из них освободится кусок нити, переброшенной через блоки, длиной $2\Delta x_1$ (с одной и другой стороны от каждого блока). Поэтому перемещение конца нити будет равно

$$\Delta l = 3\Delta x + 6\Delta x_1 = \frac{3F}{k} + 6 \frac{2F}{3k} = \frac{7F}{k}$$

4. Очевидно, мартышка пробежала до головы удава расстояние $lv_m / (v_m - v_y)$, которое по условию равно 48 попугаям (здесь l - длина Удава, v_m - скорость Мартышки, v_y - скорость Удава). Поэтому

$$\frac{lv_m}{v_m - v_y} = 48 \text{ П} \quad (*)$$

Когда Мартышка побежала обратно, она пробежала расстояние (от точки разворота) $lv_m / (v_m + v_y)$, которое по условию равно 32 П (48 П - 16 П). Поэтому

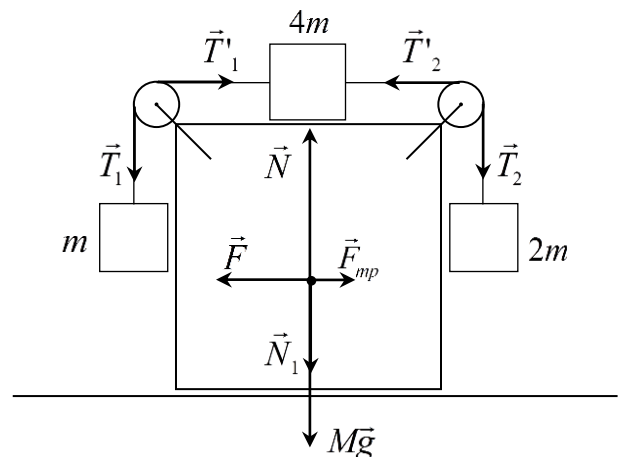
$$\frac{lv_m}{v_m + v_y} = 32 \text{ П} \quad (**)$$

Решая систему уравнений (*)-(**), найдем

$$\frac{v_m}{v_y} = 5, \quad l = 38,4 \text{ П}$$

5. Чтобы куб покоился, сумма сил, действующих на него, должна равняться нулю. На куб действуют: сила тяжести $M\vec{g}$ (M - масса куба), верхнее тело с силой \vec{N}_1 , сила реакции опоры \vec{N} , сила трения со стороны верхнего тела (направленная вправо, т.к. верхнее тело движется вправо), внешняя горизонтальная сила \vec{F} , удерживающая куб в покое (направленная, очевидно, влево), и нити, переброшенные через блоки. Нити действуют на куб через блоки, причем каждая нить оказывает воздействие в горизонтальном (\vec{T}'_1 и \vec{T}'_2) и вертикальном (\vec{T}_1 и \vec{T}_2) направлениях (см. рисунок). Поэтому условие равновесия куба дает

$$F = T_2 - T_1 - F_{mp} \quad (1)$$



где T_1 и T_2 - силы натяжения левой (связанной с меньшим грузом) и правой нитей соответственно, F_{mp} - сила трения. Таким образом, чтобы найти силу F , надо найти силы натяжения нитей и силу трения.

Поэтому рассмотрим задачу динамики для трех тел, скрепленных нитями, при нулевом ускорении куба. На меньшее тело действуют: сила тяжести и сила натяжения левой нити. На верхнее тело: сила тяжести, сила реакции куба, сила трения, силы натяжения левой и правой нитей. На большее тело: сила тяжести и сила натяжения правой нити. Поэтому второй закон Ньютона для всех тел в проекциях на направления движения каждого тела имеет вид

$$\begin{aligned} ma &= T_1 - mg \\ 4ma &= T_2 - T_1 - 4kmg \\ 2ma &= 2mg - T_2 \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь использована одинаковость ускорений тел и одинаковость сил натяжения, действующих со стороны разных концов нитей). Решая систему уравнений (2), находим

$$a = \frac{g(1-4k)}{7}.$$

Теперь из формулы (1) и второго уравнения системы (2) находим силу \vec{F}

$$F = 4ma = \frac{4mg(1-4k)}{7}$$

при $k > 1/4$, тела не будут двигаться по кубу, поэтому и куб будут стоять. $F = 0$. Таким образом

$$F = \frac{4mg(1-4k)}{7}, \text{ при } k < 0,25$$

$$F = 0, \quad \text{при } k > 0,25$$