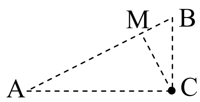
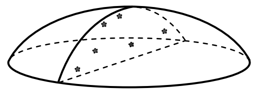
2.9. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. (2 балла) Искусственный спутник планеты, ускорение свободного падения на поверхности которой равно g, движется на малой высоте над поверхностью со скоростью, вдвое превышающей первую космическую скорость для данной орбиты. Чему равна и как направлена сила, действующая на спутник со стороны его двигателя? Масса спутника m.

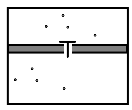
2. (2 балла) Точечный заряд, расположенный в точке С, создает в точках А и В электрическое поле с потенциалом φ_A и φ_B (рисунок; угол АСВ – прямой). Найти потенциал поля, создаваемого этим зарядом в точке М, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки С на прямую АВ.



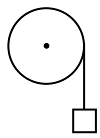
3. (2 балла) Круглый хлеб с изюмом имеет радиус $r = 20$ см. На вертикальном разрезе, проходящем через центр, в среднем оказываются разрезанными $n = 6$ изюминок. Оцените число изюминок в хлебе, если диаметр изюминки $d = 0,5$ см.



4. (2 балла) Вертикальный сосуд объемом V поделен на две части тонкой перегородкой. Объемы верхнего и нижнего отсеков относятся как 1:2; отсеки содержат разное количество идеального газа. В перегородке имеется отверстие с клапаном. Клапан открывается, если давление нижнего газа превысит давление верхнего на величину Δp. Известно, что если нагреть газ в сосуде (и в верхней, и нижней части) до температуры T_0, клапан откроется. Какое количество молей газа перейдет из нижнего отсека в верхний при его быстром нагревании до температуры T_1 ($T_1 > T_0$)?



5. (2 балла) Длинный тонкостенный диэлектрический цилиндр массой m, радиуса R и длины l расположен горизонтально и может вращаться вокруг своей оси. Цилиндр заряжен зарядом Q. На цилиндр намотана нить, ко второму концу которой привязан груз массой $m/2$. Груз отпускают. С учетом явления самоиндукции найти ускорение груза.



Председатель методической комиссии, 2015-2016 учебный год

Ответы и решения

1. Очевидно, сила тяги двигателя должна быть направлена к центру планеты, поскольку при скорости спутника, большей первой космической, силы гравитации не хватит, чтобы удержать спутник на орбите. Поэтому закон вращательного движения дает

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} + F \qquad (*)$$

где $v = 2v_0$ - скорость спутника (v_0 - первая космическая скорость), $G\frac{mM}{R^2} = mg$ - сила гравитации на поверхности планеты (g - ускорение свободного падения на поверхности), F - искомая сила тяги двигателя. А поскольку

$$\frac{mv_0^2}{R}=G\frac{mM}{R^2}=mg$$

из формулы (*) находим

$$F=\left(2^2-1\right)mg=3mg$$

2. Из определения потенциала имеем

$$\varphi_A=\frac{kQ}{AC},\ \varphi_B=\frac{kQ}{BC}$$

где k - постоянная закона Кулона, Q - заряд, расположенный в точке С. Далее из подобия треугольников АМС и АВС заключаем, что

$$\frac{MC}{BC}=\frac{AC}{\sqrt{AC^2+BC^2}}$$

Отсюда находим

$$\varphi_M=\frac{kQ}{MC}=\frac{kQ\sqrt{AC^2+BC^2}}{AC\cdot BC}=kQ\sqrt{\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{AC^2}}=\sqrt{\varphi_A^2+\varphi_B^2}$$

3. Будем считать для оценки, что хлеб имеет форму диска (цилиндра) с одинаковыми верхним и нижним основанием. Изюминка будет разрезана, если разрез пройдет на расстоянии не меньше, чем $d/2$ от ее центра. Это значит, что разрезанными будут изюминки, центры которых попадут в «ломоть» хлеба толщиной d, содержащий центр хлеба. Объем этого ломтя - $v=2rhd$ (h - высота хлеба), и по условию в него попадает n изюмин. Поэтому концентрация n_0 изюминок в хлебе равна

$$n_0=\frac{n}{v}=\frac{n}{2rhd}$$

Отсюда находим полное число изюминок в хлебе

$$N=n_0\pi r^2h=\frac{\pi nr}{2d}\sim 180 \text{ штук.}$$

Если считать хлеб не диском (с одинаковыми верхним и нижним основанием), а конусом, оценка числа изюминок отличается на множитель 2/3:

$$N=\frac{\pi nr}{3d}\sim 120 \text{ штук.}$$

4. Пусть количество вещества газа в верхней части сосуда ν_1, в нижней ν_2. Тогда из условия открывания клапана имеем

$$pv=\nu_1RT_0$$
$$\left(p+\Delta p\right)2v=\nu_2RT_0$$

где p и v - давление в верхней части сосуда в момент открытия клапана и ее объем. Вычитая эти уравнения, получим

$$\Delta p v = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_0 \qquad (*)$$

При нагревании газа до температуры, большей T_0, перепад давлений будет больше, чем Δp. Клапан откроется и начнет пропускать газ из нижней части сосуда в верхнюю. Это приведет к уменьшению давления внизу и увеличению вверху сосуда. Клапан снова закроется когда перепад снова станет равным Δp. В этот момент для газа в верхней и нижней частях сосуда имеем

$$p_1 v = (\nu_1 + \Delta\nu)\nu_1 R T_1$$
$$(p_1 + \Delta p) 2v = (\nu_2 - \Delta\nu) R T_1$$

где p_1 - давление в верхней части сосуда в момент закрытия клапана, $\Delta\nu$ - количество молей газа, перетекшего из нижней части сосуда в верхнюю. Вычитая, находим

$$\Delta p v = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_1 - \frac{3}{2}\Delta\nu R T_1$$

Отсюда и формулы (*) получаем окончательно

$$\Delta\nu = \frac{2}{9}\frac{\Delta p V (T_1 - T_0)}{R T_1 T_0}$$

5. Вращение заряженного цилиндра эквивалентно кольцевому току. Силу такого тока найдем как отношение заряда, прошедшего через сечение боковой поверхности цилиндра, к соответствующему интервалу времени. Поскольку за время Δt через сечение пройдет заряд $\Delta q = \sigma v \Delta t l$, где v - скорость вращения цилиндра в этот момент, то

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sigma v l$$

Магнитное поле соленоида, в котором течет ток I, и на единицу длины приходится число витков n есть $\mu_0 n I = \mu_0 I_l$, где I_l - ток, текущий через единицу длины соленоида. Поэтому внутри нашего цилиндра возникнет следующее магнитное поле

$$B = \mu_0 \sigma v$$

Это поле создает следующий магнитный поток через цилиндр

$$\Phi = \pi R^2 \mu_0 \sigma v$$

И, следовательно, при изменении скорости вращения цилиндра (при разгоне груза) возникает ЭДС индукции

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma \frac{\Delta v}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma a \qquad (1)$$

которая согласно правилу Ленца будет препятствовать ускорению зарядов цилиндра, а поскольку цилиндр диэлектрический, будет препятствовать его разгону. (В формуле (1) a - ускорение цилиндра). Поскольку ЭДС индукции есть работа вихревого электрического поля над единичным зарядом при его кольцевом перемещении, из (1) можно найти напряженность вихревого электрического поля E. Используя осевую симметрию задачи, имеем

$$2\pi RE = \varepsilon = \pi R^2 \mu_0 \sigma a \qquad \Rightarrow \qquad E = \mu_0 \sigma R a$$

Теперь можно записать второй закон Ньютона для тела и цилиндра

$$(m/2)a = mg - T$$
$$ma = T - QE$$

где $Q = 2\pi Rl\sigma$ - заряд цилиндра. Складывая эти уравнения и подставляя напряженность вихревого поля и заряд цилиндра, получим

$$3ma/2 = mg - 2\pi\mu_0\sigma^2 R^2 la$$

Откуда найдем

$$a = \frac{mg}{3m/2 + 2\pi\mu_0\sigma^2 R^2 l}$$

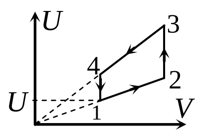
2.10. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

1. (2 балла) Тело, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя, прошло расстояние S за время τ. Какую скорость имело тело, в тот момент, когда оно прошло n-ую часть этого расстояния (S/n)?

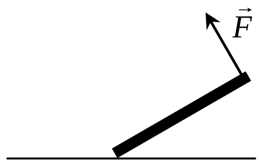
2. (2 балла) Чтобы уравновесить неоднородное бревно длиной l в горизонтальном положении на точечной опоре, находящейся на расстоянии $l/4$ от его толстого конца, на толстый конец нужно положить груз массой m. А чтобы уравновесить его на опоре, находящейся на расстоянии $l/4$ от тонкого конца, на тонкий конец нужно положить груз массой $8m$. Найти массу бревна.

3. (2 балла) Какой максимальный ток можно получить в контуре, сделанном из куска металла массы m в линейно изменяющимся со временем магнитном поле $B = \alpha t$, где α - известная постоянная? Удельное сопротивление металла ρ и его плотность ρ_0 известны. Ответ обосновать.

4. (2 балла) Зависимость внутренней энергии одноатомного идеального газа от его объема в циклическом процессе 12341 приведена на рисунке. Построить график зависимости давления от объема в этом процессе. Найти количество теплоты, полученное газом за цикл, если известно, что объем газа меняется в течение цикла в 2 раза, а внутренняя энергия – в 4 раза. Начальная внутренняя энергия газа U известна.



5. (2 балла) Человек медленно поднимает за один конец лежащий на полу стержень, прикладывая к нему силу, перпендикулярную стержню (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения между стержнем и полом человек сможет поставить стержень вертикально без его проскальзывания в точке касания пола?



Ответы и решения

1. Законы движения для времени τ дают

$$S = \frac{a\tau^2}{2}$$
$$v = a\tau$$

Где a - ускорение тела. Отсюда находим

$$a = \frac{2S}{\tau^2}$$

Применяя теперь закон равноускоренного движения к моменту времени, когда тело прошло n-ую часть расстояния S, получим

$$v_1^2 = 2a\frac{S}{n} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{2S}{\sqrt{n}\tau}$$

2. Очевидно, центр тяжести бревна находится ближе к толстому концу на расстоянии, меньшем, чем $l/4$ от его середины. Пусть расстояние от середины бревна до центра тяжести равно x. Тогда условия равновесия бревна в первом и втором случаях дают

$$M\left(\frac{l}{4} - x\right) = m\frac{l}{4}$$

$$M\left(\frac{l}{4} + x\right) = 8m\frac{l}{4}$$

где M - масса бревна. Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{l - 4x}{l + 4x} = \frac{1}{8}$$

Отсюда находим $x = 7l/36$. Подставляя это значение, например, в первое из уравнений, найдем

$$M = \frac{9}{2}m$$

3. Пусть длина проводника, образующего контур, фиксирована. Тогда ток в контуре будет максимальным при его максимальной площади, поскольку в этом случае поток магнитного поля через контур и его изменение будут максимальными. Как известно, фигурой максимальной площади при фиксированном периметре является круг. Поэтому контур должен иметь форму круга. По этой же причине (чтобы было минимально сопротивление) сечение проводника также должно иметь форму круга.

Найдем его радиус контура из условия максимальности тока. Пусть радиус контура равен r. Тогда длина контура равна $2\pi r$. Радиус проволоки найдем через массу металла

$$m = \rho_0 2\pi r \pi d^2 = 2\pi^2 \rho_0 r d^2 \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = \frac{m}{2\pi^2 \rho_0 r} \qquad (1)$$

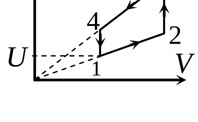
Теперь из закона электромагнитной индукции имеем для тока через контур

$$I = \frac{\Delta B S}{\Delta t R}$$

Где S - площадь контура, R - его сопротивление. Отсюда и формулы (1) получим

$$I = \frac{\pi \alpha r^2}{(\rho l / S)} = \frac{\pi \alpha r^2 \pi d^2}{\rho 2\pi r} = \frac{\alpha m}{4\pi \rho \rho_0} \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что ток в контуре не зависит от его радиуса. Таким образом, формула (2) дает максимальный ток через контур, который можно изготовить из металла массы m, помещенного в переменное магнитное поле. Для максимальности тока контур должен иметь форму круга любого радиуса, и сечение проводника тоже должно быть круглым.



4. Внутренняя энергия ν молей одноатомного идеального газа определяется соотношением

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия является линейной функцией объема $y = kx + b$ с нулевым b при постоянном давлении. Поэтому процесс 1-2 – изобарический, в котором объем меняется вдвое. Поэтому изменение внутренней энергии газа в этом процессе равно

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}p_1V_2 - \frac{3}{2}p_1 2V_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 = U$$

Поскольку для изобарического процесса $Q = \frac{5}{3}\Delta U$, то

$$Q_{1-2} = \frac{5}{3}U$$

Процесс 2-3 – изохорический, в котором внутренняя энергия (и, следовательно, давление) увеличивается вдвое, поскольку $U_3 = 4U_1 = 2U_2$. Поэтому

$$\Delta U_{2-3} = U_3 - U_2 = U_2 = 2U$$

А поскольку в этом процессе не совершается работа, то

$$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} = 2U$$

Процесс 3-4 изобарический с двукратным уменьшением давления. Поэтому

$$\Delta U_{3-4} = U_4 - U_3 = -U_3 / 2 = -2U$$

Отсюда

$$Q_{3-4} = \frac{5}{3}\Delta U_{3-4} = -\frac{10}{3}U$$

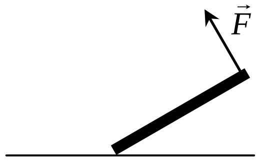
Процесс 4-1 - изохорический с двукратным уменьшением объема. Поэтому

$$\Delta U_{4-1} = U_1 - U_4 = -U$$

и, следовательно, $Q_{4-1} = \Delta U_{4-1} = -U$. Таким образом

$$Q_{1-2-3-4-1} = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1} = -\frac{2}{3}U$$

График зависимости давления от объема – прямоугольник с двукратным увеличением объема и двукратным увеличением давления.



5. Чтобы трение было минимальным, сила F в каждый момент времени должна быть минимальна. Поэтому силу F находим из условия равенства нулю суммы моментов сил относительно нижней точки

$$F = \frac{mg}{2}\cos\alpha$$

Чтобы стержень не скользил ни при каких углах наклона, проекция силы F на горизонтальное направление должна быть меньше максимальной силы трения покоя при всех углах α

$$F\sin\alpha \le \mu\left(mg - F\cos\alpha\right)$$

Отсюда

$$\mu \ge \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\left(1+\sin^2\alpha\right)}$$

Эта функция угла имеет максимум при некотором угле $\alpha = \alpha_m$. Найдем его, дифференцируя эту функцию

$$(...)' = \frac{\cos 2\alpha}{1+\sin^2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha}{\left(1+\sin^2\alpha\right)^2}$$

Отсюда

$$\sin\alpha_m = \sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad \cos\alpha_m = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

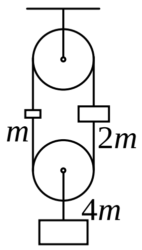
Таким образом, проскальзывания не будет ни при каком угле наклона стержня, если

$$\mu \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

2.11. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

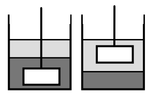
1. (2 балла) На столе на одной прямой расположены 10 тел с массами m, $2m$, … $10m$. Тела покоятся. Затем телу массой m сообщают скорость v в направлении тела с массой $2m$. После центрального абсолютно неупругого столкновения эти тела сталкиваются с третьим телом, затем с четвертым и т.д. Найти количество теплоты, выделившееся в системе тел после 9 центральных неупругих столкновений. Трение отсутствует.

2. (2 балла) Имеется система трех тел, двух блоков и двух веревок. Массы тел равны m, $2m$ и $4m$. Верхний блок подвешен к потолку. Веревки нерастяжимы и невесомы. Найти силы натяжения веревок.

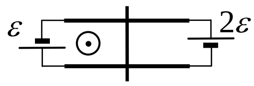


3. (2 балла) В сосуде находится смесь одинаковых масс азота N_2 и гелия He под давлением p. Абсолютную температуру газа увеличивают вдвое, при этом 2/3 молекул азота диссоциируют на атомы. Найти давление смеси газов при этой температуре. Молярные массы газов равны $\mu_{He} = 4$ г/моль, $\mu_{N_2} = 28$ г/моль. Газы идеальны.

4. (2 балла) В цилиндрический сосуд наливают одинаковые объемы несмешивающихся жидкостей с плотностями - ρ и $0,3\rho$. Тело, объем которого в 3 раза меньше объема каждой жидкости и которое тонет в обеих жидкостях, опускают в сосуд на длинной нити. Найти отношение давлений p_1 / p_2 жидкости около дна сосуда в положениях, когда тело полностью погружено либо в нижнюю (p_1), либо в верхнюю (p_2) жидкость.



5. (2 балла) Параллельные горизонтальные рельсы с сопротивлением единицы длины ρ и длиной L закреплены на расстоянии l друг от друга. К их концам присоединены две батареи с эдс ε и 2ε. На рельсы кладут перемычку массой m, которая может скользить вдоль них. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Какое положение перемычки будет положением равновесия и почему? Найти период малых колебаний перемычки около положения равновесия. Трением, сопротивлением перемычки, источников и проводов, а также индуктивностью цепи пренебречь.



Ответы и решения

1. При центральных абсолютно неупругих столкновениях тела слипаются. Поэтому после 9 столкновений все тела будут двигаться вместе. По закону сохранения импульса имеем

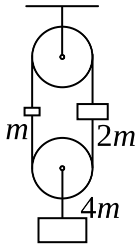
$$mv = \left(m + 2m + ... + 10m\right)v_1 = 55mv_1$$

где v_1 - скорость тел. Отсюда

$$v_1 = \frac{v}{55}$$

Количество теплоты, выделившееся при всех столкновениях, найдем теперь по закону сохранения энергии

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{\left(m + 2m + ... + 10m\right)v_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{55mv_1^2}{2} = \frac{27}{55}mv^2$$



2. Поскольку блоки не перемещаются (а только вращаются), ускорение тела массой $4m$ равно нулю. И, следовательно, сила натяжения нижней веревки, связывающей тела m и $2m$, равна

$$T_н = 2mg$$

Второй закон Ньютона для тел массой m и $2m$ в проекциях на ось, направленную вертикально вниз, имеет вид

$$2mg + T_н - T_в = 2ma$$

$$mg + T_н - T_в = -ma$$

Вычитая эти уравнения, найдем $a = g/3$. Отсюда

$$T_в = \frac{10}{3}mg$$

Сила натяжения веревки, на которой висит тело $4m$, очевидно, равна $T = 4mg$.

3. Пусть масса гелия и азота в сосуде равна m. Тогда закон Дальтона для первоначальной смеси газов дает

$$p = \frac{\nu_{He}RT}{V} + \frac{\nu_{N_2}RT}{V}$$

где

$$\nu_{N_2} = \frac{m}{\mu_{N_2}} = \nu; \qquad \nu_{He} = \frac{m}{\mu_{He}} = 7\nu,$$

количество вещества азота и гелия в сосуде, V - его объем. Отсюда имеем для начального давления смеси

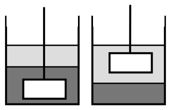
$$p = \frac{8\nu RT}{V}$$

После нагревания в сосуде будет смесь молекулярного и атомарного азота и гелия. Количество вещества молекулярного и атомарного азота после диссоциации можно найти из следующих соотношений

$$\nu'_{N_2} = \frac{1}{3}\nu; \qquad \nu'_N = \frac{4}{3}\nu$$

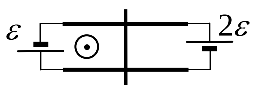
Поэтому давление в сосуде будет равно

$$p' = \frac{\nu_{He}R2T}{V} + \frac{\nu'_{N_2}R2T}{V} + \frac{\nu'_N R2T}{V} = \frac{7\nu R2T}{V} + \frac{\nu R2T}{3V} + \frac{4\nu R2T}{3V} = \frac{26\nu R2T}{3V} = \frac{13}{6}p$$



4. Поскольку на жидкость со стороны тела действует сила, равная весу жидкости в объеме тела, то для вычисления давления жидкости, в которой находится тело, можно мысленно заменить тело жидкостью и вычислять ее давление. Поэтому в первом случае давление жидкости около дна сосуда равно давлению двух столбов жидкости – плотности ρ с объемом $1,33V$ и плотности $0,3\rho$ с объемом V (V - объем жидкостей). Во втором случае давление жидкости равно давлению двух столбов жидкости – плотности ρ с объемом V и плотности $0,3\rho$ с объемом $1,33V$. Поэтому

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho g\left(1,33V/S\right) + 0,3\rho\left(V/S\right)}{\rho g\left(V/S\right) + 0,3\rho\left(1,33V/S\right)} = 1,16$$



5. Если по перемычке течет электрический ток, то на нее действует магнитное поле и она начнет двигаться. Поэтому положением равновесия будет такое ее положение, в котором через нее не течет ток. В этом случае токи в рельсах одинаковы, и из условия равенства нулю суммы напряжений на всех элементах правого замкнутого контура (ЭДС 2ε, верхний рельс от источника 2ε до перемычки, перемычка, нижний рельс от перемычки до источника 2ε) имеем

$$2\varepsilon = I2r_x$$

где

$$I = \frac{3\varepsilon}{2R}$$

ток в цепи, замкнутой цепи, R - сопротивление каждого рельса, r_x - сопротивление участка рельса от источника 2ε до перемычки. Аналогично для левого замкнутого контура, получим

$$\varepsilon = I2r_{L-x}$$

где r_{L-x} - сопротивление рельсов от левого источника до перемычки. Отсюда заключаем, что положение равновесия делит каждый рельс в отношении 1:2 (1 – левый участок, 2 – правый)

$$2r_{L-x} = r_x = \frac{1}{3}R$$

Посмотрим теперь, что будет происходить с перемычкой при ее отклонении от равновесия. Отклоним ее на Δx вправо. Тогда сопротивление участков рельсов от правого источника до перемычки уменьшится, а от левого источника до перемычки увеличится на величину

$$\Delta R = \frac{\rho \Delta x}{S}$$

Поскольку сумма напряжений на элементах правого и левого контуров по-прежнему равна нулю, а сопротивления участков рельсов в правом контуре уменьшились, а в левом увеличились, токи в правом и левом контуре будут различны. Условия равенства нулю суммы напряжений в правом и левом контуре дают (с учетом равенства нулю сопротивления перемычки)

$$2\varepsilon = I_{прав}\left(\frac{2}{3}R - 2\Delta R\right), \qquad \varepsilon = I_{лев}\left(\frac{1}{3}R + 2\Delta R\right)$$

Где $I_{прав}$ и $I_{лев}$ - токи в правом и левом контуре. Отсюда находим

$$I_{прав} - I_{лев} = \frac{2\varepsilon}{\frac{2R}{3} - 2\Delta R} - \frac{\varepsilon}{\frac{R}{3} + 2\Delta R} \approx \frac{27\varepsilon\Delta x}{RL} > 0$$

(в знаменателе малыми величинами, пропорциональными ΔR, можно пренебречь). Таким образом, ток в перемычке течет сверху вниз (от А к В) и, следовательно, со стороны магнитного поля действует сила в направлении положения равновесия (возвращающая сила), При отклонении перемычки влево, сила действует вправо, возвращая перемычку в положение равновесия. Таким образом при отклонении перемычки в любую сторону, возникают возвращающие силы, пропорциональные отклонению от равновесия

$$F = \frac{27\varepsilon Bl\Delta x}{RL} = k\Delta x,$$

где введено следующее обозначение

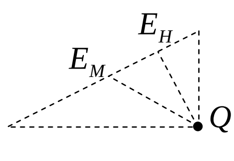
$$k = \frac{27\varepsilon Bl}{RL}$$

Поэтому перемычка совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mRL}{27\varepsilon Bl}}$$

где m - масса перемычки.

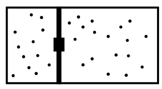
2.12. Отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3



1. (2 балла) Точечный заряд расположен в вершине прямого угла прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как 1:2. Найти отношение напряженности электрического поля, созданного зарядом в точках в основании медианы и высоты, проведенных из вершины прямого угла: $E_M : E_H$.

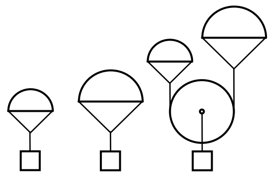
2. (2 балла) Во время гран-при Формулы-1 в Лапландии машина команды Ред Булл обгоняет машину команды Мерседес каждые $t_1 = 10$ минут, а команды Феррари – каждые $t_2 = 12$ минут. Как часто Феррари обгоняет Мерседес? Считать, что все машины едут с постоянными скоростями.

3. (2 балла) Сосуд разделен на два отсека, объемы которых относятся как 1:2, перегородкой с отверстием, заткнутым пробкой. В отсеках находится одинаковый газ под давлением p и одинаковой температуре. Пробка вылетает, если перепад давлений в отсеках равен Δp. Газ в большем отсеке нагревают, а когда пробка вылетает, нагревание прекращают. Найти давление газа после установления равновесия. Потерь тепла нет.



4. (2 балла) На высоте h над землей с постоянной скоростью летит птица. Старуха Шапокляк замечает птицу и в тот момент, когда птица находится над ней, бросает камень со скоростью v_0 ($v_0 > \sqrt{2gh}$). При какой минимальной скорости птицы старуха не сможет попасть в птицу ни при каком угле бросания?

5. (2 балла) Маленькое тело падает на землю. Если к нему прикрепить парашют, установившаяся скорость падения равна v. Если прикрепить к телу больший парашют, установившаяся скорость падения равна $v/3$. Какой будет установившаяся скорость падения тела, если привязать его к оси невесомого блока, через который переброшена нить, к одному концу которой привязан первый парашют, к другому - второй (см. рисунок). Сила сопротивлений воздуха пропорциональна скорости. Считать, что сила сопротивления на блок и тело не действует.

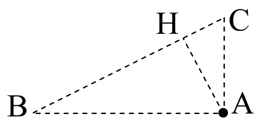


Ответы и решения

1. Пусть меньший катет треугольника равен a, больший - $2a$. Тогда, поскольку длина медианы равна половине гипотенузы, напряженность электрического поля в основании медианы равна

$$E_M = \frac{4kQ}{5a^2}$$

k - постоянная закона Кулона. Далее. Из подобия треугольников ABC и AHB (H – основание высоты, опущенной из вершины прямого угла) заключаем



$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AH} = \frac{\mathrm{BA}\cdot\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Отсюда находим

$$E_H = \frac{5kQ}{4a^2}$$

и

$$\frac{E_M}{E_H} = \frac{16}{25}$$

2. Очевидно, что между двумя обгонами одной машиной второй машины, расстояние, проходимое первой, больше расстояния, проходимого второй, на длину одного круга. Поэтому если скорость машины Ред Булл равна v_R, Мерседеса - v_M, Феррари - v_F, а длина круга - l, то для времен t_1, t_2 и искомого времени обгона машиной Феррари Мерседеса имеем

$$\frac{v_R - v_M}{l} = \frac{1}{t_1}, \qquad \frac{v_R - v_F}{l} = \frac{1}{t_2}, \qquad \frac{v_F - v_M}{l} = \frac{1}{t_3}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_3}$. Или

$$t_3 = \frac{t_2 t_1}{t_2 - t_1} = 60 \text{ мин.}$$

3. Пусть количество вещества газа в меньшем отсеке равно ν. Тогда в большем отсеке содержится 2ν молей газа (так как у газов в отсеках одинаковые температуры и давления, а объем большего отсека вдвое больше). При нагревании газа в большем отсеке его давление увеличивается, причем пробка вылетит при следующих параметрах газа

$$\left(p + \Delta p\right)\frac{2}{3}V = 2\nu R T_1$$

где T_1 - температура газа в большем отсеке в момент вылетания пробки. После выравнивания температур получим из закона сохранения энергии

$$\alpha \nu R T + \alpha 2\nu R T_1 = \alpha 3\nu R T_x$$

где α - числовой коэффициент, зависящий от атомности газа (для одноатомного - $\alpha = 3/2$), T_x - температура газа в конечном состоянии. Используя далее закон Клапейрона-Менделеева для газов в отсеках до нагревания и газа в сосуде конечном состоянии, найдем

$$p\frac{1}{3}V + \left(p + \Delta p\right)\frac{2}{3}V = p_x V$$

где p_x - искомое давление. Отсюда

$$p_x = p\left(1 + \frac{2\Delta p}{3p}\right)$$

4. Пусть скорость птицы - v, а старуха бросает камень под углом α к горизонту. Тогда чтобы камень попал в птицу горизонтальная составляющая скорости камня должна равняться скорости птицы

$$v_0 \cos\alpha = v$$

При этом в какой-то момент времени t камень должен оказаться на высоте h - тогда (при равенстве горизонтальных составляющих скоростей) он попадет в птицу. Это значит, что при каком-то значении t должно быть выполнено условие

$$h = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = v_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2}}\,t - \frac{gt^2}{2}$$

Если же это условие не выполнено ни при каком значении t, то камень не попадет в птицу. Другими словами, если квадратное уравнение

$$\frac{gt^2}{2} - \sqrt{v_0^2 - v^2}\,t + h = 0$$

не имеет решений, камень не попадает в птицу. Квадратное уравнение не имеет решений, если его дискриминант меньше нуля. Или

$$v_0^2 - v^2 < 2gh$$

Отсюда заключаем, что если

$$v_0 < \sqrt{v^2 + 2gh}$$

камень никогда не попадет в птицу.

5. Для движения тела на первом и втором парашюте имеем

$$mg = k_1 v, \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = \frac{mg}{v}$$

$$mg = k_2 \frac{v}{3}, \qquad \Rightarrow \qquad k_2 = \frac{3mg}{v}$$

где k_1 и k_2 - коэффициенты пропорциональности между силой сопротивления и скоростью для первого и второго парашютов.

Рассмотрим теперь тело на блоке. Пусть оно движется с установившейся скоростью v_1. Тогда условие равенства нулю суммы сил, действующих на блок, дает

$$2T = mg$$

где T - сила натяжения нити, переброшенной через блок. Эту силу должны обеспечить правый и левый парашют благодаря силе сопротивления воздуха; но поскольку коэффициенты пропорциональности между силой сопротивления и скоростью для парашютов различны, они, чтобы обеспечить одинаковые силы сопротивления, должны двигаться с разными скоростями. Поэтому блок будет вращаться, нить перемещаться с одой стороны от блока на другую, давая возможность парашютам двигаться с одинаковой скоростью. Найдем скорость движения нити.

Пусть в системе отсчета, связанной с блоком нить перемещается со скоростью u (справа от блока вверх, слева вниз). Тогда в системе отсчета, связанной с землей, правый парашют движется со скоростью $v_1 - u$, левый $v_1 + u$. Поэтому

$$\frac{mg}{2} = k_1 (v_1 + u) = \frac{mg}{v}(v_1 + u)$$
$$\frac{mg}{2} = k_2 (v_1 - u) = \frac{3mg}{v}(v_1 - u)$$

Решая систему уравнений найдем установившуюся скорость падения тела на блоке

$$v_1 = \frac{v}{3}$$

2.13. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс

1. (2 балла) Горизонтальный цилиндрический сосуд длиной l разделен на две части подвижной перегородкой. С одной стороны от перегородки содержится 1 моль кислорода, с другой – 1 моль гелия и 1 моль кислорода, перегородка в равновесии. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия и остается непроницаемой для кислорода. Найти ее перемещение. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение процесса.

2. (2 балла) Между двумя телами с массами m и $4m$ находится сжатая пружина. Если тело с массой $4m$ удерживать, а другое освободить, оно приобретет скорость v. Какую скорость приобретет это тело, если оба тела освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.

3. (2 балла) Имеются три точечных заряда q_1, q_2 и q_3. Заряды расположены в вакууме на расстояниях: l_{12} - от заряда q_1 до заряда q_2, l_{13} - от заряда q_1 до заряда q_3, l_{23} - от заряда q_2 до заряда q_3. Какую работу нужно совершить чтобы поменять местами заряды q_1 и q_2?

4. (2 балла) Для проведения секретных экспериментов Чебурашка и крокодил Гена изготовили палку длиной l, плотность вещества которой линейно меняется от практически нулевого значения на одном конце, до некоторого значения ρ на другом. При каких значениях ρ палка будет плавать в воде в вертикальном положении? Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

5. (2 балла) (И.Ньютон, Математические начала натуральной философии, 1687 г.) Оценить расстояние от Земли до звезд по следующим данным. Яркость Сатурна, наблюдаемого с Земли, приблизительно совпадает с яркостью наиболее близких к нам звезд. Расстояние от Сатурна до Солнца составляет $1{,}4\cdot 10^9$ км и значительно превосходит расстояние от Земли до Солнца ($1{,}5\cdot 10^8$ км). Радиус Сатурна $6\cdot 10^4$ км. Сатурн отражает 20% солнечного света.

Ответы и решения

1. Поскольку с одной стороны от перегородки содержатся два моля газа, с другой стороны – один моль, в начальный момент перегородка делит сосуд на части в отношении 2:1. Таким образом перегородка находится на расстоянии $l/3$ от одного конца сосуда и $2l/3$ от другого. После того как перегородка станет прозрачной для гелия, гелий распределится по сосуду равномерно. Это значит, что парциальное давление гелия справа и слева от перегородки будет одинаковым, причем независимо от ее положения, и, следовательно, при исследовании равновесия перегородки гелий учитывать не нужно. Другими словами, положение перегородки определяется только кислородом. А поскольку справа и слева от перегородки находится одинаковое количества вещества кослорода, перегородка будет находится посередине сосуда. Следовательно перемещение перегородки равно

$$\Delta x = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$

2. В первом случае имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \Pi \qquad (*)$$

где Π - потенциальная энергия деформации пружины. Во втором случае система тел будет замкнутой, и для нее будет справедлив закон сохранения импульса

$$mv_1 = 4mv_2 \qquad (**)$$

где v_1 и v_2 - скорости тел во втором случае. Используя далее закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2}+\frac{4mv_2^2}{2}=\Pi, \qquad (***)$$

и решая систему уравнений (**), (***) с учетом (*), получим

$$v_1=\frac{2}{\sqrt{5}}v$$

3. Совершенная работа равна приращению потенциальной энергии системы зарядов. Найдем потенциальную энергию для начальной и конечной систем. В начале:

$$\Pi_1=\frac{kq_1q_2}{l_{12}}+\frac{kq_1q_3}{l_{13}}+\frac{kq_2q_3}{l_{23}},$$

в конце:

$$\Pi_2=\frac{kq_1q_2}{l_{12}}+\frac{kq_2q_3}{l_{13}}+\frac{kq_1q_3}{l_{23}}.$$

Отсюда находим работу

$$A=\Pi_2-\Pi_1=\frac{kq_2q_3}{l_{13}}+\frac{kq_1q_3}{l_{23}}-\frac{kq_1q_3}{l_{13}}-\frac{kq_2q_3}{l_{23}}=\frac{kq_3\left(q_2-q_1\right)\left(l_{23}-l_{13}\right)}{l_{13}l_{23}}$$

4. Если палка плавает, для нее должны быть выполнены условия равновесия – сумма всех действующих на нее сил и сумма моментов всех сил (относительно любой точки) должны равняться нулю. Проверим выполнимость этих условий для вертикального положения палки. Пусть палка находится в вертикальном положении тяжелым концом вниз (только в таком положении она может быть в равновесии), погрузившись в воду на глубину x. Тогда первое условие равновесия дает

$$\rho_0 gxS=mg=\frac{\rho}{2}glS$$

где S - площадь сечения палки, m - масса палки. Здесь использовано известное обстоятельство, что при линейном изменении плотности масса тела определяется его плотностью посередине. Отсюда получаем ограничение на значение ρ, при котором палка будет плавать

$$\rho\le 2\rho_0$$

При вертикальном положении палки и равенстве сил тяжести и Архимеда будет выполнено и второе условие равновесия. Но оно может нарушаться при небольшом отклонении палки от вертикали; в этом случае вертикальное положение палки будет положением неустойчивого равновесия, и палка будет плавать лежа. Если отклонить палку от положения равновесия, силы тяжести и Архимеду уже не будут действовать вдоль одной прямой: сила тяжести приложена в центре тяжести тела, сила Архимеда – в геометрическом центре погруженной в воду части тела. Поэтому палка вернется в вертикальное положение, если центр тяжести палки будет лежать ниже середины погруженной в воду части палки. А поскольку центр тяжести палки лежит на расстоянии $l/3$ от ее тяжелого конца (это можно увидеть, проводя аналогию между палкой с меняющейся линейно плотностью и треугольником), то палка будет плавать в вертикальном положении, если

$$\frac{l}{3} \le \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \rho \ge \frac{4}{3}\rho_0$$

Таким образом, палка будет плавать в вертикальном положении, если

$$\frac{4}{3}\rho_0 \le \rho \le 2\rho_0$$

5. Будем считать, что наиболее яркие звезды имеют такую же светимость, как и Солнце, а являются яркими потому, что наиболее близки к нам. Оценим расстояние до них, используя тот факт, что их светимость совпадает со светимостью Сатурна.

Пусть светимость Солнца и звезд (количество энергии, излучаемой в единицу времени) равна L, радиус Сатурна ρ, расстояние от Солнца до Сатурна - r (примерно таким же является и расстояние от Земли до Сатурна), расстояние от ближайших звезд до Солнца (и до Земли) равно R. Тогда через малую площадку площадью ΔS, находящуюся от звезды на расстоянии R, равном расстоянию от звезды до Земли, в единицу времени проходит энергия, равная доли площади ΔS от площади сферы радиуса R:

$$W_{\text{Çâåçäà−Çåì ëÿ}} = \frac{\Delta S}{4\pi R^2} L$$

С другой стороны, через эту же площадку должна проходить точно такая же энергия, излученная Солнцем и отраженная Сатурном. Поскольку площадь сечения Сатурна равна $\pi\rho^2$, то на него в единицу времени падает следующая энергия, излученная Солнцем

$$W_{\text{Cîëíöå−Càòóðí}} = \frac{\pi\rho^2}{4\pi r^2} L$$

Две десятых части этой энергии отражается от поверхности Сатурна. Поэтому Сатурн в единицу времени отражает следующую энергию, излученную Солнцем

$$L_{\text{Càòóðí}} = \frac{0,2\rho^2}{4r^2} L$$

Поскольку солнечная энергия отражается от поверхности Сатурна равномерно по всем направлениям, через площадку площадью ΔS, находящуюся на расстоянии r от Сатурна (т.е. около Земли) в единицу времени проходит следующая энергия

$$W_{\text{Cîëíöå−Càòóðí−Çåì ëÿ}} = \frac{0,2\rho^2 \Delta S}{16\pi r^4} L$$

Поскольку яркость Сатурна и наиболее ярких звезд близки $W_{\text{Çâåçäà−Çåì ëÿ}} = W_{\text{Cîëíöå−Càòóðí−Çåì ëÿ}}$, то

$$\frac{\Delta S}{4\pi R^2} L = \frac{0,2\rho^2 \Delta S}{16\pi r^4} L$$

Отсюда находим

$$R = \frac{2r^2}{\sqrt{0,2\rho}}.$$

Вычисления дают

$$R \approx 10^{14} \text{ км.}$$

Расстояние до ближайшей к нам звезды Проксима Центавра равно

$$R \approx 0,42 \cdot 10^{14} \text{ км,}$$

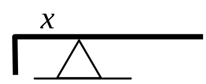
Так что вышеприведенная оценка является достаточно точной.

2.14. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

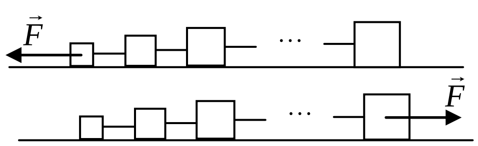
1. (2 балла) Тело массой m и с плотностью, вдвое большей плотности воды, подвешено на нити к пустой цилиндрической банке, плавающей на поверхности воды. На сколько уменьшится или увеличится объем вытесненной банкой воды, если тело переложить в банку. Плотность воды ρ_0 - известна.

2. (2 балла) Во время гран-при Формулы-1 в Лапландии машина команды Ред Булл обгоняет машину команды Мерседес каждые $t_1 = 10$ минут, а команды Феррари – каждые $t_2 = 12$ минут. Как часто Феррари обгоняет Мерседес? Считать, что все машины едут с постоянными скоростями.

3. (2 балла) Конец однородного стержня длиной l согнули под прямым углом так, что длина согнутого участка составляет четвертую часть длины стержня. На каком расстоянии x от согнутого конца нужно расположить точечную опору, чтобы стержень находился в равновесии?



4. (2 балла) Из тонкого материала с массой единицы площади $\lambda = 1$ кг/м^2 изготовили воздушный шар сферической формы и заполнили его гелием. При каком минимальном радиусе шар поднимет сам себя? Молярные массы воздуха и гелия равны $\mu_в = 29$ г/моль и $\mu_{He} = 4$ г/моль соответственно. Газы считать идеальными. Молярный объем идеального газа при рассматриваемых условиях - $V_0 = 22,4$ л – известен.



5 (2 балла) Сто тел с массами m, $2m$, $3m$, … $100m$ связаны невесомыми нитями и расположены на гладком горизонтальном столе. Сначала на тело массой m действуют горизонтальной силой F, потом той же силой действуют на тело массой $100m$ (см. рисунок). Найти