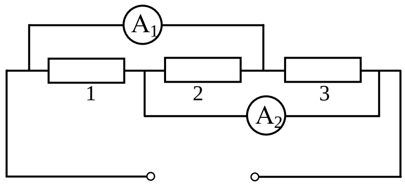
2. Материалы заданий 2015/2016 учебного года

2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

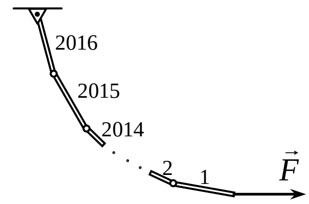
Задание

1. (2 балла) Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела находятся на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого – крайнего или среднего) равно a, второго (тоже неизвестно какого) - $3a$. Найти ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

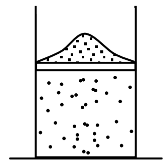
2. (2 балла) В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, два из трех резисторов одинаковы, третий отличается от них. Известно, что показания первого амперметра $I_1 = I$, второго $I_2 = 2I/3$. Известно сопротивление первого резистора $r_1 = r$. Найти сопротивления второго и третьего резисторов. Считать, что сопротивления амперметров равны нулю.



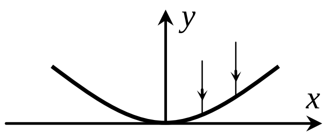
3. (2 балла) 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-ый стержень к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная сила F. Найти угол между 2016 стержнем и вертикалью в равновесии.



4. (2 балла) В теплоизолированном сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ. Объем газа V, давление p. Песок медленно (по одной песчинке) снимают с поршня, и объем газа медленно увеличивается вдвое. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объем газа вырос вдвое, если бы песок сняли с поршня весь сразу? Атмосферное давление отсутствует. **Указание.** В адиабатическом процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^{\gamma} = const$, где γ - известное число ($\gamma > 1$).



5. (2 балла) Зеркало образовано вращением параболы $y = 2x^2$ вокруг оси y (параболическое зеркало). На зеркало параллельно оси y падают два луча: один на некотором расстоянии x, второй - на расстоянии $2x$ от оси y. Какой из этих лучей после отражения от поверхности зеркала пересечет ось y ближе к вершине параболы и на сколько? Найти расстояние от вершины параболы до точки пересечения этого луча и оси y.



Ответы и решения

1. Ускорения зарядов не зависят от их скоростей, поэтому без ограничения общности можно считать, что в рассматриваемый момент заряды покоятся. В этом случае суммарный импульс системы зарядов равен нулю, а поскольку она замкнута, он будет равен нулю и в дальнейшем.

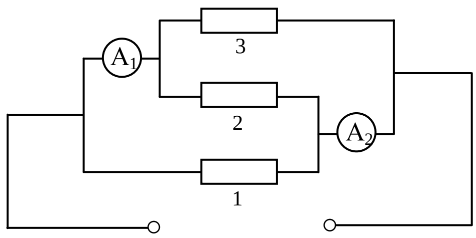
Так как тела находятся на одной прямой, то силы могут действовать только вдоль этой прямой, ускорения могут быть направлены только вдоль этой прямой. Условию задачи не противоречат два случая направления ускорений: два данных ускорения тел направлены одинаково (первый случай), или противоположно (второй случай).

В первом случае за некоторый малый интервал времени Δt два заряда, ускорения которых нам даны, приобрели скорости $a\Delta t$ и $3a\Delta t$, направленные одинаково. Значит, импульс этих зарядов равен $m4a\Delta t$, поэтому таким же должен быть и импульс третьего заряда, следовательно третий заряд должен приобрести скорость $4a\Delta t$, направленную противоположно. Значит, его ускорение равно $4a$ и направлено противоположно ускорениям $\vec{a}$ и $3\vec{a}$.

Аналогично, если данные в условии ускорения направлены противоположно, ускорение третьего заряда равно $2a$ и направлено так же, как вектор ускорения $\vec{a}$.

Обратим внимание, что полученный результат не зависит от знаков зарядов и расстояний между ними.

2. Если бы совпадали сопротивления крайних резисторов, ток через амперметры был бы одинаковым. Поэтому есть две возможности – равны друг другу сопротивления второго и третьего резисторов $r_2 = r_3$ (а сопротивление первого от них отличается), или равны друг другу сопротивления первого и второго резисторов $r_1 = r_2$ (а отличным от них является третье сопротивление).



Поскольку амперметры не имеют сопротивлений, резисторы включены в цепь параллельно источнику, причем амперметр A_1 измеряет ток, текущий через второй и третий резисторы, амперметр A_2 – через первый и второй (см. рисунок). Поэтому

$$i_2 + i_3 = I_1 = I$$

$$i_1 + i_2 = I_2 = \frac{2}{3} I$$

где i_1, i_2 и i_3 - токи, текущие через первый, второй и третий резисторы. Отсюда заключаем, что в первом случае, когда $r_2 = r_3$ (и соответственно $i_2 = i_3$), $i_2 = i_3 = I/2$, $i_1 = I/6$. Поэтому в этом случае сопротивление второго и третьего резисторов втрое меньше сопротивления первого

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}$$

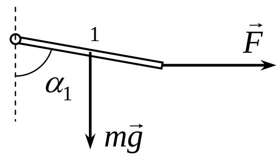
Во втором случае $r_1 = r_2$, $i_1 = i_2 = I/3$, $i_3 = 2I/3$. Сопротивление третьего резистора вдвое меньше сопротивления первого и второго:

$$r_2 = r, \qquad r_3 = \frac{r}{2}$$

Таким образом, с данными условия совместимы два решения

1 ответ: $r_2 = r_3 = \dfrac{r}{3}$; 2 ответ: $r_2 = r, \quad r_3 = \dfrac{r}{2}$

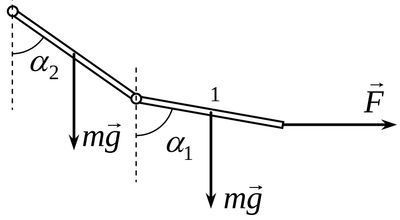
3. На первый стержень действуют – сила тяжести, внешняя сила $\vec{F}$, сила реакции шарнира (см. рисунок). Условие равновесия этого стержня (условие моментов относительно шарнира) дает



$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha_1 = Fl\cos\alpha_1 \qquad (*)$$

Где m - масса стержня, l - его длина, α_1 - угол между первым стержнем и вертикалью. Из этого равенства находим

$$tg\,\alpha_1 = \frac{2F}{mg}$$



Рассмотрим теперь условие равновесия двух нижних стержней. В качестве внешних сил на них действуют – две силы тяжести, сила реакции второго шарнира (которым второй стержень связан с третьим) и сила $\vec{F}$ (см. рисунок). Используем далее условие моментов относительно второго шарнира. При этом заметим, что плечо силы $\vec{F}$ относительно второго шарнира больше плеча силы $\vec{F}$ относительно первого на величину $l\cos\alpha_2$, а силы тяжести первого стержня – на величину $l\cos\alpha_2$. Поэтому условие равновесия дает

$$mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha_1 + l\sin\alpha_2\right) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_2 = F\left(l\cos\alpha_1 + l\cos\alpha_2\right) \qquad (**)$$

Но первые слагаемые в скобках в правой и левой частях равны друг другу согласно условию равновесия первого стержня (*). Поэтому равенство (**) отличается от равенства (*) тем, что в него входит только угол α_2, но две силы тяжести, причем одна из них с удвоенным плечом. Поэтому

$$tg\,\alpha_2 = \frac{2F}{3mg}$$

Отсюда ясно, как будут находиться следующие углы – в знаменателе будут появляться нечетное число, равное $2k-1$, где k - номер стержня, угол наклона которого исследуется. Поэтому для 2016 стержня имеем

$$tg\,\alpha_{2016} = \frac{2F}{4031mg}$$

4. Конечное давление газа найдем по закону адиабатического процесса

$$pV^{\gamma} = p_1(2V)^{\gamma}$$

Отсюда находим

$$p_1 = \frac{p}{2^{\gamma}}$$

Очевидно работа, совершенная газом в этом процессе, равна изменению его внутренней энергии

$$A = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}\left(pV - p_1 2V\right) = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right)$$

Поскольку поршень массивный, то и при снятии всего песка сразу, он будет перемещаться достаточно медленно, и процесс будет равновесным. Поэтому во втором процессе газ совершит ту же самую работу. Но если в первом случае она тратилась на увеличение потенциальной энергии поршня и песчинок, которые оказались поднятыми на разные высоты, теперь она будет израсходована на изменение потенциальной и кинетической энергии поршня

$$A = \left(2Mgh - Mgh\right) + E_k \qquad (*)$$

где M - масса поршня, h - высота расположения поршня над дном сосуда в начальном состоянии. С другой стороны, в конечном состоянии (после снятия песка) давление газа равно давлению поршня

$$p_1 = \frac{Mg}{S}$$

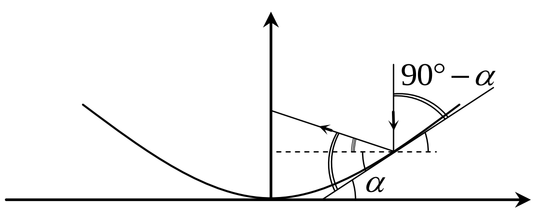
где S - площадь сечения сосуда. Поэтому формулу (*) можно привести к виду

$$A = \left(p_1 2V - p_1 V\right) + E_k = p_1 V + E_k = \frac{pV}{2^{\gamma}} + E_k$$

Отсюда находим

$$E_k = A - \frac{pV}{2^{\gamma}} = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{pV}{2^{\gamma}} = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{\gamma}} - \frac{1}{2^{\gamma}}\right) = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^{\gamma}}\right)$$

5. Рассмотрим отражение от поверхности зеркала луча, имеющего (до отражения) координату x. Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда тангенс угла наклона поверхности зеркала в точке падения луча к оси x определяется производной нашей параболы



$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = 4x \qquad (*)$$

(угол α на рисунке; все углы α отмечены на рисунке одной дугой). Геометрически очевидно (см. рисунок), что угол между или отраженным лучом и зеркалом в точке падения равен $90° - \alpha$ (отмечен на рисунке двумя дугами). Поэтому угол между отраженным лучом и осью x равен $90° - 2\alpha$. Следовательно, координата точки пересечения отраженного луча и оси y определяется соотношением

$$y = 2x^2 + x\,\mathrm{tg}(90° - 2\alpha) = 2x^2 + \frac{x}{\mathrm{tg}(2\alpha)}$$

Используя, далее известную формулу для тангенса двойного угла и соотношение (*), получим

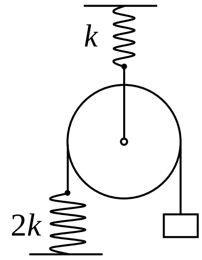
$$y = 2x^2 + \frac{x\left(1-\mathrm{tg}^2\alpha\right)}{2\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1}{8}.$$

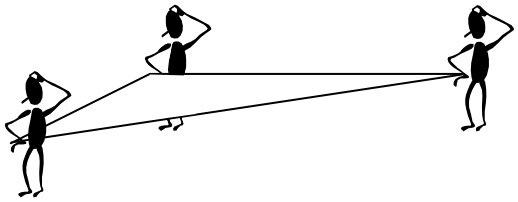
Таким образом, расстояние от вершины параболы до точки пересечения рассматриваемого луча и оси y не зависит от луча. Это значит, что все лучи придут в точку, лежащую на расстоянии 1/8 от вершины параболы.

2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Задание

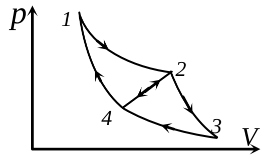
1. (2 балла) Через блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой m, к другому пружину, второй конец которой закреплен на полу (см. рисунок). Коэффициенты жесткости пружин k и $2k$ (см. рисунок). На сколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы? Массой блока пренебречь.



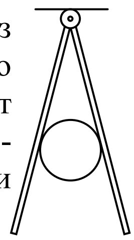


2. (2 балла) Имеется плоская массивная плита массой m в форме прямоугольного треугольника с отношением катетов 1:2. Три человека удерживают плиту в горизонтальном положении за вершины. Найти минимальные силы, с которыми каждый человек должен действовать для этого на плиту. Ответ обосновать.

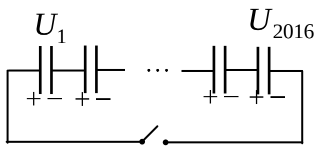
3. (2 балла) С одноатомным идеальным газом проводят цикл Карно 1-2-3-4-1, причем абсолютные температуры газа в изотермических процессах 1-2 и 3-4 отличаются вдвое. Известно, что КПД процесса 1-2-4-1 равен 0,25. Найти КПД процесса 4-2-3-4.



4. (2 балла) Две пластинки массой M и длиной l прикреплены шарнирно по одной из своих сторон к потолку. Шар радиуса $R = l/6$ вставлен между пластинками так, что расстояние от точек касания шара и пластинок до шарнира равно $l/2$. Коэффициент трения между шаром и пластинками k. Какой должна быть масса шара, чтобы он находился в равновесии? При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и пластинками пластинки не смогут удержать шар при любой его массе?

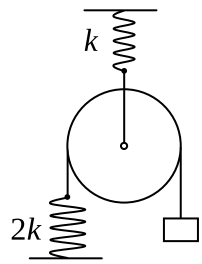


5. (2 балла) 2016 конденсаторов с одинаковой емкостью $C = 1$ мкФ заряжают до напряжений $U_1 = 1$ В, $U_2 = 2$ В, … $U_{2016} = 2016$ В с использованием соответствующих источников напряжения. Затем все конденсаторы соединяют последовательно в цепь (положительно заряженную обкладку одного конденсатора с отрицательно заряженной обкладкой другого) так, как показано на рисунке. Какой заряд протечет через ключ после его замыкания от 2016-го конденсатора (заряженного до напряжения $U_{2016} = 2016$ В) к 1-му конденсатору (заряженному до напряжения $U_1 = 1$ В)?



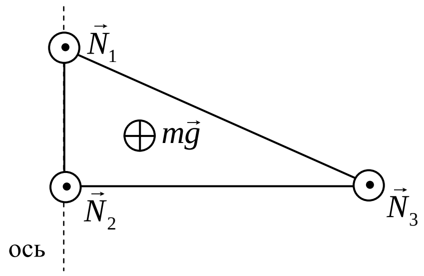
Ответы и решения

1. Поскольку груз в равновесии сила натяжения веревки, переброшенной через блок, равна mg. Со стороны этой веревки на блок действует удвоенная сила натяжения, т.е. $2mg$. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей верхний блок - $2mg$. Следовательно, блок опустился по сравнению с положением, когда верхняя пружина не деформирована, на величину



$$\Delta x_1 = \frac{2mg}{k}$$
и, следовательно, на эту величину уменьшилось расстояние от пола до блока. Поэтому, если бы нижняя веревка не растягивалась, тело опустилось бы на удвоенную величину Δx_1. А поскольку нижняя веревка растянулась на величину
$$\Delta x_2 = \frac{mg}{2k},$$
то тело опустилось на
$$\Delta l = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{4mg}{k} + \frac{mg}{2k} = \frac{9mg}{2k}$$

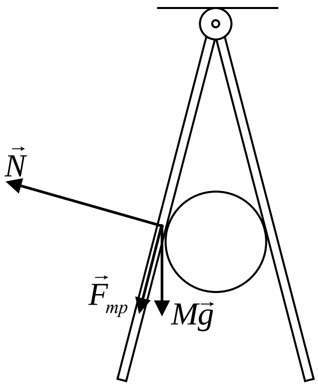
2. Когда силы минимальны, они направлены вертикально вверх. Докажем, что все эти силы равны друг другу. Используем уравнения статики. На плиту действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и силы со стороны людей $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ и $\vec{N}_3$, направленные вертикально вверх. Поскольку плита в равновесии, то сумма моментов всех сил, действующих на плиту, равна нулю, причем относительно любой оси. Возьмем в качестве таковой ось, проходящую через одну из сторон треугольника (см. рисунок; вид сверху). Поскольку моменты сил $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ относительно рассматриваемой оси равны нулю, то должна быть равна нулю сумма моментов сил тяжести и $\vec{N}_3$ относительно этой оси. Но так как центр тяжести плоского треугольника лежит в точке пересечения его медиан, которая делит каждую медиану в пропорции 2:1, считая от вершины, то плечо силы $\vec{N}_3$ в три раза больше плеча силы тяжести. Поэтому

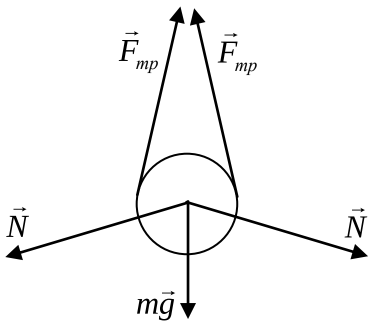


$$N_3 = \frac{mg}{3}$$
Аналогично доказывается, что и силы N_1 и N_2 равны одной трети силы тяжести. Обратим внимание, что этот результат справедлив для любого треугольника, а не обязательно прямоугольного, как это сформулировано в данной задаче.

3. КПД заданного в условии цикла Карно равен
$$\eta = 1 - \frac{T_{3-4}}{T_{1-2}} = 0,5$$
Свяжем это значение с КПД циклов 1-2-4-1 и 4-2-3-4. Пусть количество теплоты, полученное газом на участке 1-2, равно Q_1, отданное на участке 3-4 - Q_2, на участке 4-2 (2-4) газ получил (отдал) Q_3. Тогда
$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},\ \eta_{1241} = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1},\ \eta_{4234} = \frac{Q_3 - Q_2}{Q_3}$$
Выражая из второй формулы Q_1, из третьей Q_2 (и то и другое через Q_3), и подставляя эти выражения в первую формулу, получим
$$1 - \eta = (1 - \eta_{1241})(1 - \eta_{4234})$$
Или
$$\eta_{4234} = \frac{\eta - \eta_{1241}}{1 - \eta_{1241}} = 0,333$$

4. Рассмотрим сначала равновесие пластины. На нее действуют сила тяжести, сила реакции со стороны шара, направленная перпендикулярно пластине и сила трения, направленная вдоль пластины. Условие равновесия пластины (условие моментов относительно шарнира) дает





$$N\frac{l}{2} = Mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

где α - угол между пластиной и вертикалью. Отсюда $N = Mg\sin\alpha$. Условие равновесия шара дает

$$mg + 2N\sin\alpha = 2F_{тр}\cos\alpha$$

При минимальной массе шара, который может быть удержан пластинами сила трения достигает максимального значения $F_{тр} = kN$. Отсюда

$$mg \le 2N\left(k\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

Или

$$m \le 2M\sin\alpha\left(k\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

Находя теперь тригонометрические функции угла α через геометрические параметры задачи ($\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$) получим

$$m \le \frac{M\left(3k-1\right)}{5}$$

Это неравенство никогда не выполняется, если $k < 1/3$ (т.к. правая часть в этом случае отрицательна).

5. До замыкания ключа заряды левой и правой обкладок каждого конденсатора одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. После замыкания ключа и установления равновесия – тоже, поскольку в этом случае минимальна потенциальная энергия системы зарядов. Поэтому по проводам, связывающим любую пару конденсаторов, протекут одинаковые заряды. Пусть от отрицательно заряженной обкладки каждого конденсатора к положительно заряженной обкладке соседнего протечет некоторый заряд x (знак этой величины также пока не известен). Тогда на левой обкладке n-го конденсатора будет находиться заряд $q_n = U_nC + x$, а напряжение между левой и правой обкладками будет равно

$$U_n' = \frac{U_nC + x}{C} = U_n + \frac{x}{C}.$$

Суммируя напряжения на конденсаторах и приравнивая это напряжение к нулю (условие равновесия зарядов системы), получаем

$$U_1' + U_2' + ... + U_N' = \sum_{n=1}^{N} U_n + \frac{Nx}{C} = \frac{N(N+1)U_1}{2} + \frac{Nx}{C} = 0$$

где $N = 2016$. Отсюда

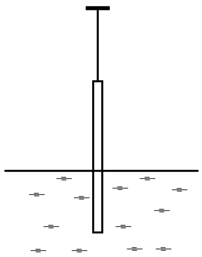
$$x = -\frac{(N+1)U_1C}{2} = -1{,}0085\cdot10^{-3} \text{ Кл.}$$

.

2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

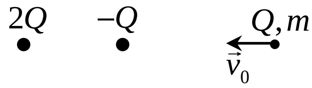
Задания

1. (2 балла) В сосуде находится смесь одинаковых масс азота N_2 и гелия He под давлением p. Абсолютную температуру газа увеличивают вдвое, при этом 2/3 молекул азота диссоциируют на атомы. Найти давление смеси газов при этой температуре. Молярные массы газов равны $\mu_{He}=4$ г/моль, $\mu_{N_2}=28$ г/моль. Газы считать идеальными.

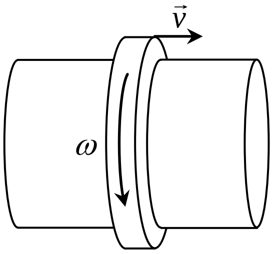


2. (2 балла) Тонкий стержень длиной l подвешен на нити за один из своих концов. Стержень медленно погружают в воду, опуская точку подвеса (см. рисунок). На какую максимальную глубину нижний конец стержня погрузится в воду? Плотность материала стержня в два раза меньше плотности воды.

3. (2 балла) Два точечных заряда $2Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии l друг от друга. Из бесконечности на заряды вдоль их соединяющей прямой налетает заряд Q, имеющий массу m и начальную скорость v_0. При каком минимальном значении v_0 этот заряд сможет долететь до заряда $-Q$?



4. (2 балла) Тонкая массивная шайба надета без зазора на горизонтальный стержень радиуса R (см. рисунок). Если шайбу закрутить с угловой скоростью ω, она остановится через время t. Какой путь пройдет шайба вдоль стержня, если закрутить ее с угловой скоростью ω и одновременно сообщить ей скорость $\vec{v}$, направленную вдоль стержня?



5. (2 балла) В однородном магнитном поле по круговой орбите радиуса R движется точечный заряд. Индукцию поля медленно (за время, много большее периода обращения заряда) увеличивают в 2 раза. Каким будет радиус орбиты заряда после этого?

Ответы и решения

1. Пусть масса гелия и азота в сосуде равна m. Тогда закон Дальтона для первоначальной смеси газов дает

$$p=\frac{\nu_{He}RT}{V}+\frac{\nu_{N_2}RT}{V}$$

где

$$\nu_{N_2}=\frac{m}{\mu_{N_2}}=\nu; \qquad \nu_{He}=\frac{m}{\mu_{He}}=7\nu,$$

количество вещества азота и гелия в сосуде, V - его объем. Отсюда имеем для начального давления смеси

$$p=\frac{8\nu RT}{V}$$

После нагревания в сосуде будет смесь молекулярного и атомарного азота и гелия. Количество вещества молекулярного и атомарного азота после диссоциации можно найти из следующих очевидных соотношений

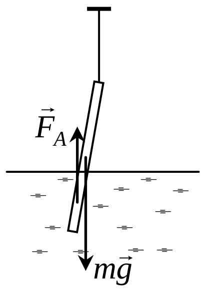
$$\nu'_{N_2} = \frac{1}{3}\nu; \qquad \nu'_N = \frac{4}{3}\nu$$

Поэтому давление в сосуде будет равно

$$p' = \frac{\nu_{He}R2T}{V} + \frac{\nu'_{N_2}R2T}{V} + \frac{\nu'_N R2T}{V} = \frac{7\nu R2T}{V} + \frac{\nu R2T}{3V} + \frac{4\nu R2T}{3V} = \frac{52\nu RT}{3V} = \frac{13}{6}p$$

2. В процессе погружения на стержень действуют силы тяжести, Архимеда, и натяжения нити. При этом ясно, что в начале погружения стержень будет располагаться вертикально, в самом конце – плавать в горизонтальном положении на поверхности воды. Поэтому максимальной глубиной погружения нижнего конца будет такая глубина, при которой стержень перестанет располагаться вертикально. Найдем эту глубину.

Вертикальное положение стержня будет устойчивым до тех пор, пока при малом его отклонении от вертикального положения будут возникать силы в это положение его возвращающие. А поскольку при малом отклонении стержня от равновесия возникают моменты сил тяжести и Архимеда относительно точки крепления нити к стержню, то устойчивость вертикального положения пропадает, когда момент силы Архимеда относительно этой точки не станет больше момента силы тяжести. Учитывая, что сила тяжести приложена к центру тяжести всего стержня, а сила Архимеда – к центру тяжести погруженной в воду части стержня, получим условие нарушения вертикальной устойчивости стержня



$$\rho_0 x\left(l - \frac{x}{2}\right) = \rho l \frac{l}{2}$$

где ρ и ρ_0 - плотности стержня и воды, x - глубина погружения стержня в воду, l - его длина. Решая квадратное уравнение, найдем максимальную глубину погружения стержня в воду

$$x = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}\right) = \frac{l\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}$$

3. На больших расстояниях от системы зарядов движущийся заряд Q отталкивается от нее, на малых – притягивается. Действительно, если расстояние от заряда Q до системы зарядов большое (много большее расстояние между зарядами $2Q$ и $-Q$), то расстояние до каждого из них практически одинаково, и за счет большего заряда того же знака отталкивание больше притяжения. Однако взаимодействие на малых расстояниях будет обязательно отталкиванием из-за меньшего расстояния до заряда противоположного знака. Поэтому чтобы заряд Q смог достигнуть заряда $-Q$, он должен пройти точку нулевой силы, при этом минимальной скорости на бесконечности отвечает нулевая скорость заряда Q в точке нулевой силы.

Точка нулевой силы находится из соотношения

$$\frac{kQ^2}{x^2} = \frac{k2Q^2}{\left(l+x\right)^2}$$

где k - постоянная закона Кулона, x - расстояние от точки нулевой силы до заряда $-Q$. Отсюда находим

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{2}+1\right)l$$

А теперь для движения заряда Q из бесконечности в точку нулевой силы используем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = Q\Pi = Q\left(-\frac{kQ}{x} + \frac{k2Q}{l+x}\right)$$

где Π - потенциальная энергия заряда Q в точке нулевой силы. Подставляя в последнюю формулу величину x из предпоследней, получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} \cdot \frac{kQ^2}{ml}} = \sqrt{\frac{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{kQ^2}{ml}}$$

4. Из первого условия находим ускорение шайбы

$$\omega R = at \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{\omega R}{t}$$

Во втором случае начальная скорость шайбы будет равна

$$v_0 = \sqrt{(\omega R)^2 + v^2}$$

поэтому время остановки находится из следующего соотношения

$$t_1 = \frac{\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{\omega R} t,$$

причем за торможение движения шайбы вдоль стержня отвечает проекция ускорения противоположная скорости v

$$a_{\parallel} = \frac{\omega R v}{t\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}.$$

Поэтому путь, пройденный шайбой вдоль стержня, можно найти как

$$S = vt_1 - \frac{a_{\parallel} t_1^2}{2} = \frac{vt\sqrt{(\omega R)^2 + v^2}}{2\omega R}$$

5. В постоянном магнитном поле заряд движется по окружности (если начальная скорость заряда перпендикулярна линиям магнитной индукции). При этом индукция магнитного поля B, скорость заряда v и радиус его орбиты R связаны соотношением, которое представляет собой второй закон Ньютона для этого заряда:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{m} BR = v \tag{1}$$

Поскольку по условию магнитное поле изменяется медленно, можно считать, что в каждый момент времени заряд движется по окружности, и соотношение (1) имеет место. Однако при изменении индукции скорость заряда и радиус орбиты будут также меняться, но их приращения Δv и ΔR будут связаны соотношением, которое следует из (1)

$$\frac{q}{m}\Delta(BR) = \Delta v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{m} R\Delta B + \frac{q}{m} B\Delta R = \Delta v \tag{2}$$

где q и m величина заряда и его масса. С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции при изменении магнитного поля возникнет вихревое электрическое поле, которое и будет разгонять заряд. Работу вихревого электрического поля над зарядом найдем по закону электромагнитной индукции. Пусть индукция магнитного поля изменилась на величину ΔB за время Δt. Тогда работа вихревого поля при перемещении заряда по замкнутому пути равнялась бы $q\dfrac{\Delta BS}{\Delta t}$, где S - площадь орбиты, а при его перемещении на величину $v\Delta t$ - следующей величине

$$q\frac{\Delta BS}{\Delta t}\frac{v\Delta t}{2\pi R} = \frac{qvR\Delta B}{2} \tag{3}$$

Применяя теперь к заряду теорему об изменении кинетической энергии, получим для приращения его кинетической энергии за время Δt:

$$\frac{qvR\Delta B}{2} = \Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv\Delta v \tag{4}$$

Подставляя теперь приращение скорости заряда из (4) в (2), получим

$$\frac{1}{2} R\Delta B + B\Delta R = 0 \tag{5}$$

Умножая теперь равенство (5) на $2R$, получим с учетом того, что $\Delta\left(R^2\right)=2R\Delta R$:

$$R^2\Delta B+2RB\Delta R=0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\left(BR^2\right)=0 \tag{6}$$

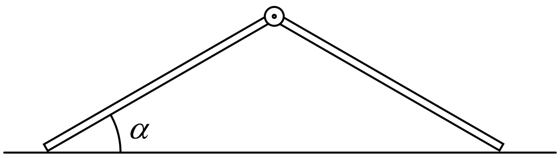
Из формулы (6) следует, что произведение индукции магнитного поля на квадрат радиуса орбиты не изменяется при медленном изменении индукции. Поэтому, если индукция магнитного поля увеличивается в два раза, радиус орбиты уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

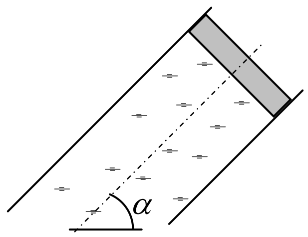
2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

Задания

1. (2 балла) Машина через каждые Δt секунд проезжает мимо столба линии электропередачи. Если водитель увеличит скорость машины на величину Δv, она будет проезжать мимо столба каждые Δt_1 секунд. Через какое время машина будет проезжать мимо столба линии электропередачи, если водитель увеличит ее скорость еще на величину Δv?

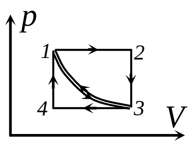
2. (2 балла) Два одинаковых стержня соединены шарниром и поставлены вертикально на шероховатый пол так, что угол между стержнями и поверхностью равен α (см. рисунок). При каком минимальном угле α возможно такое равновесие? Коэффициент трения между стержнями и поверхностью равен k. Стержни находятся в вертикальной плоскости.



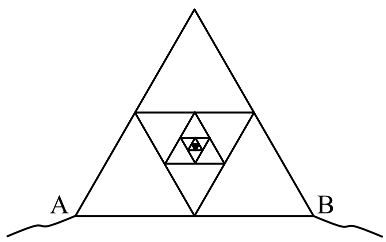


3. (2 балла) Цилиндрический сосуд с жидкостью наклонен под углом α к вертикали. В сосуд вставлен поршень радиуса R, плотно прилегающий к стенкам сосуда и не пропускающий жидкость, но пропускающий воздух. При какой минимальной массе поршня вся его нижняя поверхность будет касаться жидкости? Атмосферным давлением пренебречь.

4. (2 балла) С одноатомным идеальным газом проводят два циклических процесса 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Процессы 1-2 и 3-4 – изобарические, 4-1 и 2-3 – изохорические, 1-3 – адиабатический. КПД процесса 1-2-3-1 известен и равен η. Найти КПД процесса 1-3-4-1, если температура газа в состоянии 1 в 1,4 раза больше температуры газа в состоянии 3.



5. (2 балла) (2 балла) Электрическая цепь составлена из бесконечного количества равносторонних треугольников так, как это показано на рисунке. Каждый «последующий» треугольник вдвое меньше предыдущего и присоединен к серединам его сторон. Найти сопротивление цепи, включенной в сеть между точками А и В. Известно, что сопротивление сторон большого треугольника равно r, сопротивление каждого проводника пропорционально его длине.



Ответы и решения

1. Пусть расстояние между столбами равно l, а скорость машины в первом случае - v. Тогда

$$\frac{1}{\Delta t}=\frac{v}{l}$$

После того как машина увеличила скорость на Δv, аналогичное соотношение дает

$$\frac{1}{\Delta t_1}=\frac{v+\Delta v}{l},$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta v}{l}=\frac{1}{\Delta t_1}-\frac{1}{\Delta t}=\frac{\Delta t-\Delta t_1}{\Delta t\Delta t_1}$$

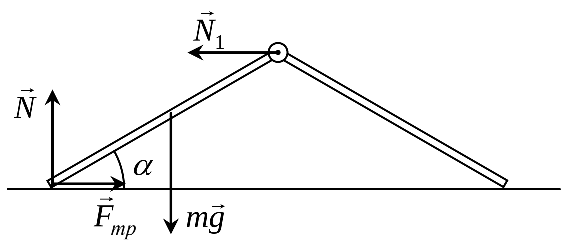
После того как машина увеличила свою скорость на $2\Delta v$, имеем

$$\frac{1}{\Delta t_2}=\frac{v+2\Delta v}{l}=\frac{v}{l}+\frac{2\Delta v}{l}=\frac{1}{\Delta t}+\frac{2\Delta v}{l}=\frac{1}{\Delta t}+\frac{2\left(\Delta t-\Delta t_1\right)}{\Delta t\Delta t_1}=\frac{2\Delta t-\Delta t_1}{\Delta t\Delta t_1},$$

и соответственно

$$\Delta t_2=\frac{\Delta t\Delta t_1}{2\Delta t-\Delta t_1}$$

2. На стержень действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции поверхности $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, и сила реакции со стороны второго стержня $\vec{N}_1$, причем последняя направлена горизонтально. (Это связано с симметрией задачи, из-за которой силы реакции со стороны стержней, с одной стороны, должны быть равны друг другу, а с другой, быть противоположными друг другу в силу третьего закона Ньютона). Условие моментов относительно нижней точки стержня дает



$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha=N_1 l\sin\alpha$$

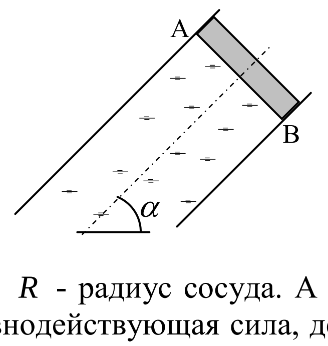
где l - длина стержня. Отсюда

$$N_1=\frac{mg}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Поскольку в горизонтальном направлении на стержень действуют только силы $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$, а в вертикальном – силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$, стержень будет находиться в равновесии, пока сила N_1 не превысит максимальную силу трения покоя. Т.е. условие

$$kmg\geq\frac{mg}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\qquad\Rightarrow\qquad tg\,\alpha\geq\frac{1}{2k}$$

есть условие покоя стержня.



3. По условию поршень в сосуде не может удерживаться воздухом, находящимся под ним, поскольку воздух может просачиваться между поршнем и стенками сосуда. Поэтому поршень опустится так, что сила, действующая на него со стороны жидкости, будет компенсировать составляющую силы тяжести, направленную вдоль сосуда.

При минимальной массе поршня, полностью касающегося жидкости, давление жидкости в т.А равно нулю, в точке В

$$p=\rho g2R\cos\alpha$$

где R - радиус сосуда. А поскольку давление жидкости возрастает линейно с ростом глубины, равнодействующая сила, действующая на поршень со стороны жидкости, определяется давлением посередине поршня

$$F = \rho g R \cos\alpha \pi R^2$$

Поэтому условие равновесия поршня дает

$$\pi\rho g R^3 \cos\alpha = mg\sin\alpha$$

откуда находим

$$m = \pi\rho R^3 \operatorname{ctg}\alpha$$

В заключение заметим, что силы, действующие на поршень со стороны жидкости, распределены по сечению поршня неравномерно. Однако, поскольку круглый поршень в цилиндрическом сосуде может двигаться только поступательно, для анализа равновесия поршня достаточно только уравнения сил (но не моментов).

4. Пусть температуры газа в состояниях 1, 2, 3, 4 равны соответственно T_1, T_2, T_3, T_4. Поскольку в процессе 1-2-3-1 газ получает тепло в процессе 1-2 и отдает в процессе 2-3, то

$$\eta = 1 - \frac{3\nu R(T_2 - T_3)}{5\nu R(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{3(1 - T_3/T_2)}{5(1 - T_1/T_2)}$$

Аналогично для процесса 1-3-4-1 имеем

$$\eta_1 = 1 - \frac{5\nu R(T_3 - T_4)}{3\nu R(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{5(T_3/T_4 - 1)}{3(T_1/T_4 - 1)}$$

С другой стороны законы Гей-Люссака и Шарля для процессов 4-1, 2-3, 1-2 и 3-4 дают

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = x \text{ и } \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = y$$

Поэтому КПД циклических процессов 1-2-3-1 и 1-3-4-1 можно переписать с использованием введенных отношений температур

$$\eta = 1 - \frac{3(1-x)}{5(1-y)} \text{ и } \eta_1 = 1 - \frac{5(1/y - 1)}{3(1/x - 1)} = 1 - \frac{5(1-y)x}{3(1-x)y}$$

Отсюда получаем

$$(1-\eta)(1-\eta_1) = \frac{x}{y}$$

Поскольку

$$\frac{x}{y} = \frac{T_4}{T_1} : \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_3}{T_1} = \frac{1}{n}$$

где $n = 1{,}2$, окончательно находим

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{n(1-\eta)} = 1 - \frac{5}{6(1-\eta)}$$

5. Поскольку в задаче есть только одна величина с размерностью сопротивления (например, сопротивление стороны большого треугольника r), то сопротивление всей цепи R должно линейно выражаться через величину r

$$R = \alpha r,$$

где α - некоторое число. В частности, сопротивление «второго» треугольника (со всеми внутренними проводниками) при включении его в цепь между точками M и N равно $\alpha(r/2)$, третьего - $\alpha(r/4)$ и т.д. (рис. 1).

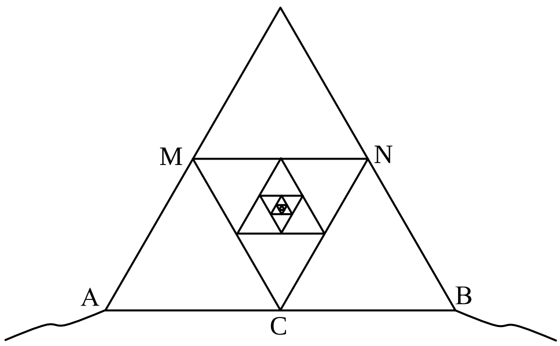


Рис.1

Из симметрии цепи очевидно, что ток, текущий по проводникам AC и CB одинаков. Поэтому, если мысленно раздвинуть точку C на две точки - C_1 и C_2 (лежащие на середине стороны первого и в вершине второго треугольника соответственно) и ввести не имеющий сопротивления проводник, их соединяющий (рис. 2), то ток по нему течь не будет. Это значит, что этот проводник можно уда-

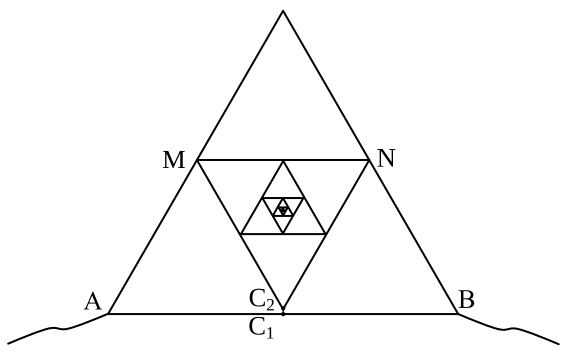


Рис.2

лить, не нарушая цепь. Это же справедливо и для всех остальных «внутренних» треугольников, вершины которых, лежащие на оси симметрии цепи, можно отсоединить от середин стороны «предыдущих» треугольников (рис. 2). Таким образом, данная в условии задачи цепь эквивалентна цепи, показанной на рисунке 3, причем сопротивление треугольника MNC равно $\alpha(r/2)$.

Далее для вычисления сопротивления этой цепи используем стандартный прием, применяемый для вычисления сопротивлений бесконечных цепей. Заменим «внутреннюю» часть цепи одним сопротивлением $\alpha(r/2)$. Тогда сопротивление нашей цепи, которое, с одной стороны, равно αr, может быть найдено как сопротивление цепи, изображенной на рисунке 4, на котором соединительные провода сопротивлений не имеют.

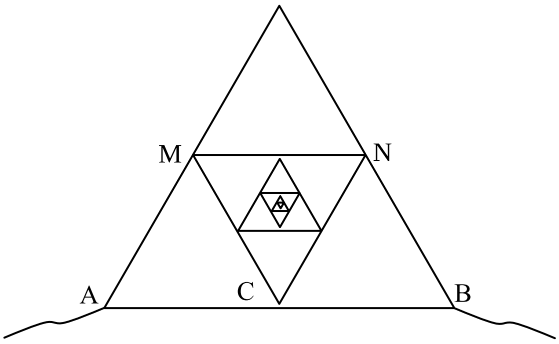


Рис.3

Находя сопротивление цепи, показанной на рисунке 4, и приравнивая его αr, получим

$$\alpha r = \frac{2(\alpha+1)r}{3\alpha+4}$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

(второй корень является отрицательным). Поэтому сопротивление цепи, данной в условии задачи, равно

$$R = \frac{(\sqrt{7}-1)r}{3}$$

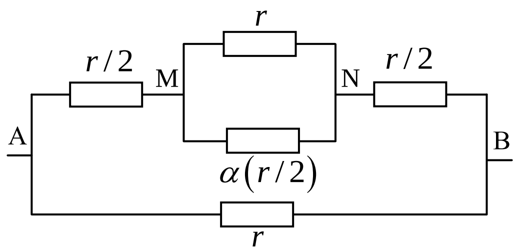


Рис. 4