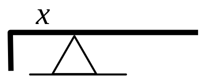
2.14. Олимпиада имени И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

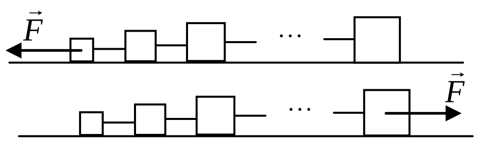
1. (2 балла) Тело массой m и с плотностью, вдвое большей плотности воды, подвешено на нити к пустой цилиндрической банке, плавающей на поверхности воды. На сколько уменьшится или увеличится объем вытесненной банкой воды, если тело переложить в банку. Плотность воды ρ_0 - известна.

2. (2 балла) Во время гран-при Формулы-1 в Лапландии машина команды Ред Булл обгоняет машину команды Мерседес каждые $t_1 = 10$ минут, а команды Феррари – каждые $t_2 = 12$ минут. Как часто Феррари обгоняет Мерседес? Считать, что все машины едут с постоянными скоростями.

3. (2 балла) Конец однородного стержня длиной l согнули под прямым углом так, что длина согнутого участка составляет четвертую часть длины стержня. На каком расстоянии x от согнутого конца нужно расположить точечную опору, чтобы стержень находился в равновесии?



4. (2 балла) Из тонкого материала с массой единицы площади $\lambda = 1$ кг/м^2 изготовили воздушный шар сферической формы и заполнили его гелием. При каком минимальном радиусе шар поднимет сам себя? Молярные массы воздуха и гелия равны $\mu_в = 29$ г/моль и $\mu_{He} = 4$ г/моль соответственно. Газы считать идеальными. Молярный объем идеального газа при рассматриваемых условиях - $V_0 = 22,4$ л – известен.



5 (2 балла) Сто тел с массами m, $2m$, $3m$, … $100m$ связаны невесомыми нитями и расположены на гладком горизонтальном столе. Сначала на тело массой m действуют горизонтальной силой F, потом той же силой действуют на тело массой $100m$ (см. рисунок). Найти отношение сил натяжения нити, связывающей тела с массами $49m$ и $50m$ в первом и во втором случае.

Ответы и решения

1. Условия равновесия банки с телом в первом и во втором случаях дают

$$(M+m)g = \rho_0 g V_{б,1} + \rho_0 g V_m$$
$$(M+m)g = \rho_0 g V_{б,2}$$

где M и m - массы банки и тела, $V_{б,1}$, $V_{б,2}$ и V_m - объемы погруженной в воду части банки (в первом и втором случаях) и тела. Из этих формул видно, что объем погруженной в воду части банки увеличиться, поскольку во втором случае нет силы Архимеда, действующей на тело. Разность погруженных объемов найдем, вычитая второе уравнение из первого и учитывая, что плотность тела вдвое больше плотности воды

$$V_{б,2} - V_{б,1} = \frac{m}{2\rho_0}.$$

2. Очевидно, что между двумя обгонами одной машиной второй машины, расстояние, проходимое первой, больше расстояния, проходимого второй, на длину одного круга. Поэтому если скорость машины Ред Булл равна v_R, Мерседеса - v_M, Феррари - v_F, а длина круга - l, то для времен t_1, t_2 и искомого времени обгона машиной Феррари Мерседеса имеем

$$\frac{v_R - v_M}{l} = \frac{1}{t_1}, \qquad \frac{v_R - v_F}{l} = \frac{1}{t_2}, \qquad \frac{v_F - v_M}{l} = \frac{1}{t_3}.$$

Поэтому, вычитая второе равенство из первого, получим $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_3}$. Или

$$t_3 = \frac{t_2 t_1}{t_2 - t_1} = 60 \text{ мин.}$$

3. Условие равновесия стержня дает

$$\frac{mx}{4} + \frac{mx^2}{2l} = \frac{m\left(\frac{(n-1)l}{n} - x\right)^2}{2l}$$

где m - масса стержня. Отсюда находим

$$x = \frac{9l}{32}$$

(решение через центр тяжести несогнутой части проще и приводит к тому же ответу).

4. На шар действует сила тяжести (на оболочку и на газ внутри шара) и выталкивающая сила со стороны окружающего воздуха. Шар будет подниматься, если выталкивающая сила будет больше силы тяжести. Сила тяжести равна

$$(M + m_{He})g$$

где M и m_{He} - массы оболочки и гелия. Выталкивающая сила, действующая на шар, равна

$$m_{возд} g$$

где $m_{возд}$ - масса воздуха в объеме шара. Массы гелия и воздуха в объеме шара найдем по закону Клапейрона-Менделлева (при условии равенства давления гелия давлению воздуха, поскольку оболочка не обладает упругостью)

$$m_{He} = \frac{\mu_{He} pV}{RT} = \frac{\mu_{He} V}{V_0} \text{ и } m_{возд} = \frac{\mu_{возд} pV}{RT} = \frac{\mu_{возд} V}{V_0}$$

где μ_{He} и $\mu_{возд}$ - молярные массы гелия и воздуха, p, T и V - давление и температура воздуха и объем шара, $V_0 = pV/T$ - молярный объем идеального газа при рассматриваемых условиях (здесь мы пренебрегли толщиной оболочки). Отсюда

$$M \le m_{возд} - m_{He} = \frac{(\mu_{возд} - \mu_{He})V}{V_0}$$

Поскольку масса оболочки равна $4\pi\lambda R^2$, а объем шара - $4\pi R^3/3$ этой формулы получаем ограничение снизу на радиус шара, который поднимает сам себя

$$R \ge \frac{3\lambda V_0}{(\mu_{возд} - \mu_{He})} = 2,68 \text{ м}$$

5. Ускорение тел и в том, и в другом случае будет одинаковым и равным

$$a = \frac{F}{(1+2+3+...+100)m} = \frac{F}{\left(\frac{100 \cdot 101}{2}\right)m} = \frac{F}{50 \cdot 101 m} \qquad (1)$$

В первом случае сила натяжения нити, связывающей грузы массами $49m$ и $50m$, сообщает ускорение участку цепочки грузов $50m$, $51m$, $52m$, …, $100m$. Поэтому она равна

$$T^{(1)}_{49-50} = (50m + 51m + ... + 100m)a = \left(\frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2}\right)ma = \frac{50}{2} \cdot 153ma$$

Подставляя сюда ускорение (1), получим

$$T^{(1)}_{49-50} = \frac{153}{202} F$$

Во втором случае сила натяжения этой нити сообщает ускорение (1) участку цепочки с грузами m, $2m$, $3m$, …, $49m$. Поэтому

$$T^{(2)}_{49-50} = (m + 2m + ... + 49m)a = \frac{49 \cdot 50}{2} ma = \frac{49}{202} F$$

Отсюда

$$\frac{T^{(1)}_{49-50}}{T^{(2)}_{49-50}} = \frac{153}{49}$$

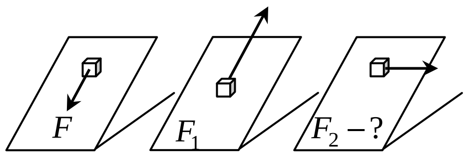
2.15. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

1. (2 балла) Тело движется равномерно по окружности радиуса R со скоростью v. Найти величину среднего ускорения тела за одну треть периода движения.

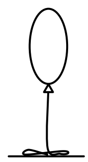
2. (2 балла) Между двумя телами с массами m и $4m$ находится сжатая пружина. Если кубик с массой $4m$ удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью v. С какой скоростью будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях. Трением и массой пружины пренебречь.

3. (2 балла) Правильный шестиугольник образован стержнями, равномерно заряженными одинаковыми зарядами. Если один из стержней удалить, напряженность и потенциал электрического поля в центре шестиугольника будут равны E и φ. Найти напряженность и потенциал поля в центре шестиугольника, если удалить еще один (соседний) стержень.

4. (2 балла) Чтобы тело, покоящееся на наклонной плоскости, двигалось, к нему надо приложить минимальную силу $F=8$ Н, направленную параллельно плоскости вниз, или минимальную силу $F_1=18$ Н, направленную параллельно плоскости вверх. Какую минимальную силу F_2, направленную параллельно плоскости горизонтально нужно приложить к телу, чтобы оно начало двигаться?



5. (2 балла) Воздушный шар наполнен гелием массой m. Давление гелия в шаре превосходит внешнее на величину Δp при любом внешнем давлении. К шару привязана длинная веревка, масса единицы длины которой λ. Часть веревки лежит на земле. На сколько поднимется или опустится шар при увеличении атмосферного давления от p_0 до $1{,}1p_0$ и неизменной температуре. Массой оболочки шара пренебречь. Молярные массы гелия и воздуха известны.



Ответы и решения

1. За одну треть периода, т.е. за время

$$t=\frac{1}{3}\frac{2\pi R}{v}$$

тело совершает треть полного оборота, т.е. поворачивается на угол $120°$. Поэтому модуль вектора изменения скорости равен

$$\Delta v=2v\cos 30°=\sqrt{3}v$$

Отсюда находим величину среднего ускорения

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{2\pi R}$$

2. В первом случае имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \Pi \qquad (*)$$

где Π - потенциальная энергия деформации пружины. Во втором случае система тел будет замкнутой, и для нее будет справедлив закон сохранения импульса

$$mv_1 = 4mv_2 \qquad (**)$$

где v_1 и v_2 - скорости тел во втором случае. Используя далее закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{4mv_2^2}{2} = \Pi, \qquad (***)$$

и решая систему уравнений (**), (***) с учетом (*), получим

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}v$$

3. Очевидно, напряженность поля в центре целого шестиугольника равна нулю (поле каждого стержня компенсируется полем противоположного), потенциал $\varphi_{ö} = 6\varphi_0$, где φ_0 - потенциал поля одного стержня. Поэтому напряженность поля в центре шестиугольника при удалении одного стержня равна полю одного стержня, причем вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно этому стержню, потенциал - $\varphi = 5\varphi_0$. Из последнего равенства находим потенциал поля одного стержня $\varphi_0 = \varphi/5$

Когда удаляется соседний стержень, напряженность поля в центре шестиугольника равна напряженности поля двух стержней, модули векторов напряженностей этих полей одинаковы, а угол между ними составляет $60°$. Потенциал равен сумме потенциалов четырех стержней. Поэтому напряженность и потенциал электрического поля в центре шестиугольника после удаления двух соседних стержней равны

$$E_1 = \sqrt{3}E, \qquad \varphi_1 = 4\varphi_0 = 4\varphi/5$$

4. В первом случае сумма внешней силы и составляющей силы тяжести, направленной вдоль плоскости, должна «победить» максимальную силу трения. Во втором – максимальную силу трения должна «победить» их разность. В третьем – векторная сумма. Поэтому условия начала движения в трех случаях дают

$$F + mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$$
$$F_1 - mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$$
$$\sqrt{F_2^2 + (mg\sin\alpha)^2} = \mu mg\cos\alpha$$

Из двух первых уравнений находим

$$\mu mg\cos\alpha = \frac{(F_1 + F)}{2}$$
$$mg\sin\alpha = \frac{(F_1 - F)}{2}$$

Подставляя эти равенства в третье уравнение, получим

$$F_2 = \sqrt{(\mu mg\cos\alpha)^2 - (mg\sin\alpha)^2} = \sqrt{FF_1} = 12 \text{ Н}$$

5. Условие равновесия шара дает

$$F_A - mg = \lambda hg$$

где F_A - сила Архимеда, действующая на шар, h - длина висящего конца веревки. Силу Архимеда, действующую на шар найдем как

$$F_A = \rho_{\text{âî çä}} gV$$

где $\rho_{\text{âî çä}}$ - плотность воздуха, V - объем шара. Плотность воздуха найдем, применяя закон Клапейрона-Менделеева к воздуху в объеме шара

$$\rho_{\text{âî çä}} = \frac{p_0 \mu_{\text{âî çä}}}{RT}.$$

где p_0 - давление воздуха, $\mu_{\text{âî çä}}$ - его молярная масса. С другой стороны, массу гелия в шаре можно найти по закону Клапейрона-Менделеева для гелия в шаре. Учитывая, что давление гелия равно $p_0 + \Delta p$ и считая оболочку шара очень тонкой, получим

$$m = \frac{(p_0 + \Delta p)V\mu_{He}}{RT}$$

С помощью этого соотношения можно связать плотность воздуха с массой гелия в шаре

$$\rho_{\text{âî çä}} = \frac{p_0 \mu_{\text{âî çä}}}{RT} = \frac{p_0}{(p_0 + \Delta p)} \frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}} \frac{(p_0 + \Delta p)\mu_{He}}{RT} = \frac{p_0}{(p_0 + \Delta p)} \frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}} \frac{m}{V}$$

Отсюда получаем для длины висящего конца веревки

$$h = \frac{m}{\lambda}\left(\frac{p_0}{(p_0 + \Delta p)} \frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}} - 1\right)$$

Как следует из этой формулы при изменении атмосферного давления до величины $1{,}1p_0$ изменится и длина висящего конца веревки

$$h_1 = \frac{m}{\lambda}\left(\frac{1{,}1p_0}{(1{,}1p_0 + \Delta p)} \frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}} - 1\right)$$

Таким образом шар поднимется на высоту

$$\Delta h = h_1 - h = \frac{m}{\lambda}\left(\frac{1{,}1p_0}{(1{,}1p_0+\Delta p)}\frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}} - \frac{p_0}{(p_0+\Delta p)}\frac{\mu_{\text{âî çä}}}{\mu_{He}}\right) = \frac{0{,}1m\mu_{\text{âî çä}}\,p_0\Delta p}{\lambda\mu_{He}(1{,}1p_0+\Delta p)(p_0+\Delta p)}$$