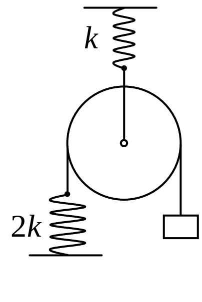
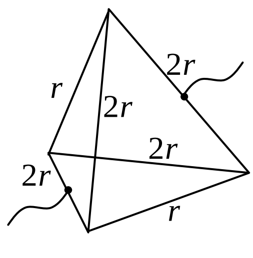
2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

1. (2 балла) У проходной Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» образовалась очередь школьников, желающих принять участие в заключительном туре олимпиады «Росатом», длиной $L=80$ метров. Каждую минуту первые $n=8$ человек из очереди проходят через проходную, а за это время в конец очереди приходят $k=4$ новых человек. Через $t=40$ минут очередь исчезла. С какой средней скоростью двигались люди, пока они находились в очереди? Ответ выразите в метрах в минуту. Сколько человек участвовало в олимпиаде? Считать, что каждый человек занимает в очереди одинаковое место.



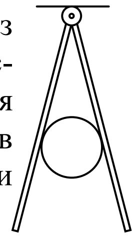
2. (2 балла) Через блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой m, к другому пружину, второй конец которой закреплен на полу (см. рисунок). Коэффициенты жесткости пружин k и $2k$ (см. рисунок). На сколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы? Массой блока пренебречь.

3. (2 балла) Имеется два стакана с водой. В первом стакане содержится некоторое количество холодной воды, во втором – вдвое большее количество горячей воды. Когда из первого стакана перелили некоторое количество воды во второй стакан, температура воды в нем понизилась на величину Δt. Затем из второго стакана такое же количество воды вернули назад в первый стакан так, количество воды в стаканах стало равно первоначальному. На сколько повысилась температура воды в первом стакане? Потерями тепла и теплоемкостью стаканов пренебречь.



4. (2 балла) Из проволоки сделали правильную пирамиду, четыре ребра которой имеют сопротивление r, а два - $2r$ (см. рисунок). К серединам сторон, имеющих сопротивление $2r$, подключают источник электрического напряжения. Чему равно сопротивление пирамиды?

5. (2 балла) Две пластинки массой M и длиной l прикреплены шарнирно по одной из своих сторон к потолку. Шар радиуса $R = l/6$ вставлен между пластинками так, что расстояние от точек касания шара и пластинок до шарнира равно $l/2$. Коэффициент трения между шаром и пластинками k. Какой должна быть масса шара, чтобы он находился в равновесии? При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и пластинками пластинки не смогут удержать шар при любой его массе?



Ответы и решения

1. «Хвост» очереди перемещается со следующей средней скоростью

$$v_x = \frac{L}{t} = 2 \text{ м/мин}$$

Где $L = 80$ м – первоначальная длина очереди, $t = 40$ мин – время «рассасывания» очереди. При этом очередь каждую минуту становится короче на

$$N = n - k = 2 \text{ 1/мин}$$

человек (размерность величин n и k - 1/мин). Это значит, что каждый человек занимает в очереди следующее место

$$\Delta l = \frac{L}{t(n-k)} = 0{,}5 \text{ м}$$

Поскольку при движении очереди каждую минуту проходят $n = 8$ человек, то каждый человек проходит в минуту расстояние $n\Delta l$, и, следовательно, скорость человека

$$v = n\Delta l = \frac{nL}{t(n-k)} = 4 \text{ м/мин}$$

Поскольку каждую минуту проходят $n = 8$ человек, а очередь рассасывается за время $t = 40$ минут, то в олимпиаде участвовало

$$N_1 = nt = 320 \text{ человек.}$$

2. Поскольку груз в равновесии сила натяжения веревки, переброшенной через блок, равна mg. Со стороны этой веревки на блок действует удвоенная сила натяжения, т.е. $2mg$. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей верхний блок - $2mg$. Следовательно, блок опустился по сравнению с положением, когда верхняя пружина не деформирована, на величину

$$\Delta x_1 = \frac{2mg}{k}$$

и, следовательно, на эту величину уменьшилось расстояние от пола до блока. Поэтому, если бы нижняя веревка не растягивалась, тело опустилось бы на удвоенную величину Δx_1. А поскольку нижняя веревка растянулась на величину

$$\Delta x_2 = \frac{mg}{2k},$$

то тело опустилось на

$$\Delta l = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{4mg}{k} + \frac{mg}{2k} = \frac{9mg}{2k}$$

3. Эту задачу проще всего решить, подводя тепловой баланс для начального и конечного состояний воды в стаканах (т.е. не рассматривая процессы переливания воды). Итак, пусть масса воды в первом стакане m, во втором - $2m$. Так как масса воды в стаканах в конце процесса равна первоначальной, а температура воды во втором стакане уменьшилась на величину Δt, в течение двух переливаний вода во втором стакан отдала количество теплоты $Q = c2m\Delta t$ (c - удельная теплоемкость воды). Поскольку по условию теплопотери отсутствуют, это количество теплоты приняла вода в первом стакане. Поэтому

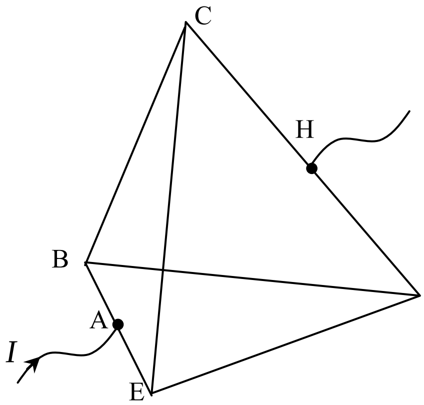
$$cm\Delta t_1 = c2m\Delta t$$

где Δt_1 - изменение температуры воды в первом стакане. Отсюда получаем

$$\Delta t_1 = 2\Delta t$$

4. Пусть при приложении к цепи электрического напряжения в нее втекает (а с противоположной стороны вытекает) ток I . Найдем напряжения на всей цепи. Данная цепь обладает значительной симметрией - если провести плоскость через одно из ребер, к которому подключен электрический контакт и середину противоположного ребра, к которой подключен другой контакт, части цепи с двух сторон от этой плоскости отличаются только заменой право-лево. Поэтому ток I в точке контакта делится пополам (на участках AB и AE; см. рисунок), и, следовательно, напряжение на участках AB и AE равно

$$U_{AB} = U_{AE} = \frac{I}{2} r$$



Далее. Напряжения на участках ABC и AEC одинаковы. Поэтому

$$\frac{I}{2} r + I_1 r = \frac{I}{2} r + I_2 2r$$

где I_1 и I_2, текущие по проводам BC и EC. Отсюда с учетом того, что $I_1 + I_2 = I/2$, находим

$$I_1 = 2I_2 = \frac{I}{3}$$

Поэтому напряжения на участках BC и BE равны

$$U_{BC} = U_{EC} = \frac{I}{3} r$$

А поскольку напряжение на участке CH равно напряжениям на участках AB и AC

$$U_{CH} = \frac{I}{2} r ,$$

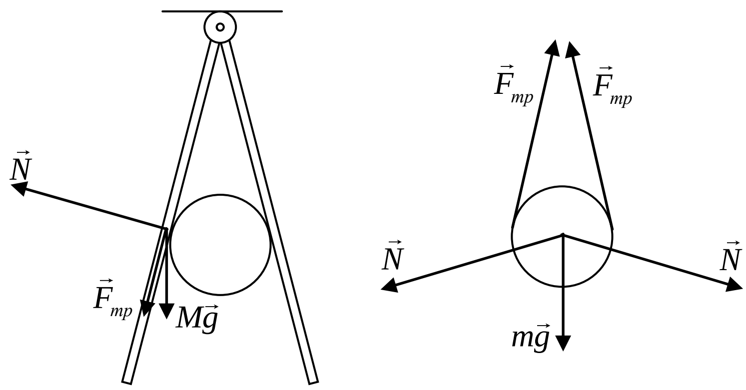
то напряжение на всей цепи есть

$$U_{AH} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CH} = \frac{I}{2} r + \frac{I}{3} r + \frac{I}{2} r = \frac{4r}{3} I .$$

Отсюда заключаем, что сопротивление всей цепи равно

$$R = \frac{4r}{3}$$

5. Рассмотрим сначала равновесие пластины. На нее действуют сила тяжести, сила реакции со стороны шара, направленная перпендикулярно пластине и сила трения, направленная вдоль пластины. Условие равновесия пластины (условие моментов относительно шарнира) дает



$$N \frac{l}{2} = Mg \frac{l}{2} \sin\alpha$$

где α - угол между пластиной и вертикалью. Отсюда $N = Mg\sin\alpha$. Условие равновесия шара дает

$$mg + 2N\sin\alpha = 2F_{тр}\cos\alpha$$

При минимальной массе шара, который может быть удержан пластинами сила трения достигает максимального значения $F_{тр} = kN$. Отсюда

$$mg \le 2N\left(k\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

Или

$$m \le 2M\sin\alpha\left(k\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

Находя теперь тригонометрические функции угла α через геометрические параметры задачи ($\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$) получим

$$m \le \frac{M\left(3k-1\right)}{5}$$

Это неравенство никогда не выполняется, если $k < 1/3$ (т.к. правая часть в этом случае отрицательна).