

## 2.14. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

1. Два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  уравновешены на неравноплечих весах ( $m_1 < m_2$ ). Грузы меняют местами, добавляя к грузу  $m_2$  еще один точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу  $m_1$ , чтобы равновесие весов восстановилось?
2. Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому - 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?
3. Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя с постоянным ускорением и за десятую секунду проходит путь  $S = 10$  м. Найдите величину ускорения автомобиля.
4. Фигуристы исполняют следующий элемент: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнерши (в том же направлении). Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнерши за время  $t = 10$  секунд, за это время фигуристка  $n = 9$  раз повернулась лицом к своему партнеру, причем первый раз (из этих 13) фигуристка была повернута к нему лицом в самом начале элемента, последний – в конце. За какое время фигуристка совершает один оборот?
5. На горизонтальной доске лежит мел. Коэффициент трения между доской и мелом  $k = 0,3$ . Доске резко сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = 5$  м/с, а через время  $\tau = 1$  с резко останавливают. Найти длину следа мела на доске. Считать, что при скольжении по доске мел оставляет след; если мел движется по уже оставленному следу, то длина следа не изменяется.  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

### Ответы и решения

1. Два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  уравновешены на неравноплечих весах ( $m_1 < m_2$ ). Грузы меняют местами, добавляя к грузу  $m_2$  точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу  $m_1$ , чтобы равновесие весов восстановилось?

**Решение.** Условия равновесия грузов в первом и втором случае дают

$$\begin{aligned}m_1 l_1 &= m_2 l_2 \\ 2m_2 l_1 &= (m_1 + \Delta m) l_2\end{aligned}$$

где  $l_1$  и  $l_2$  - плечи весов,  $\Delta m$  - масса дополнительного груза. Деля уравнения друг на друга, находим

$$\Delta m = \frac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}$$

2. Два друга решили сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (причем через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому кто шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другому - 21 шаг. Сколько ступенек имеет эскалатор снизу доверху?

**Решение.** Пусть количество ступенек на эскалаторе сверху донизу равно  $N$ , длина каждой ступеньки (вдоль эскалатора) равна  $\Delta l$ , первый друг совершает шаг за время  $\Delta t$ , второй – за время  $2\Delta t$ .

Так как первый друг сделал во время подъема 28 шагов, то он затратил на это время  $28\Delta t$ , а  $N - 28$  ступенек ушли наверх под порожек эскалатора. Поэтому скорость эскалатора равна

$$v_{\text{э}} = \frac{(N - 28)\Delta l}{28\Delta t}$$

Второй сделал 21 шаг, значит за время  $42\Delta t$  под верхний порожек эскалатора ушли  $N - 21$  ступенек. Поэтому скорость эскалатора будет равна

$$v_{\text{э}} = \frac{(N - 21)\Delta l}{42\Delta t}$$

Приравнявая эти скорости и решая уравнение относительно  $N$ , получим

$$N = 42$$

3. Автомобиль начинает двигаться из состояния покоя с постоянным ускорением и за десятую секунду проходит путь  $S = 10$  м. Найдите величину ускорения автомобиля.

**Решение.** Координаты автомобиля через 9 и 10 секунд после начала движения равны

$$x_9 = \frac{at_9^2}{2}; \quad x_{10} = \frac{at_{10}^2}{2}$$

где  $t_9 = 9$  с и  $t_{10} = 10$  с. Отсюда находим путь  $S$ , пройденный за десятую секунду после начала движения

$$S = x_{10} - x_9 = \frac{a(t_{10}^2 - t_9^2)}{2}$$

Отсюда

$$a = \frac{2S}{(t_{10}^2 - t_9^2)} = 1,05 \text{ м/с}^2.$$

4. В некоторый момент времени фигуристы начинают исполнение следующего элемента: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнерши. Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнерши за время  $t = 10$  секунд, за это время фигуристка  $n = 9$  раз повернулась лицом к своему партнеру, причем первый раз (из этих 9) фигуристка была повернута к нему лицом в самом

начале элемента, последний – в самом конце. Сколько времени тратит фигуристка на один оборот вокруг своей оси?

**Решение.** Пусть угловая скорость вращения фигуристки  $\omega_2$ , фигуриста  $\omega_1$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ). Очевидно

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{t_1}; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{t_2}$$

где  $t_1 = t/2$  и  $t_2$  - время полного оборота фигуриста и фигуристки. В системе отсчета, связанной с фигуристкой, фигурист вращается в противоположном направлении с угловой скоростью  $\omega_2 - \omega_1$ . Время полного оборота фигуриста вокруг фигуристки, которое с одной стороны есть  $t/(n-1)$ , равно

$$\frac{t}{n-1} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{t_2 t_1}{t_1 - t_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n-1}{t} = \frac{1}{t_2} - \frac{2}{t} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{t}{n+1} = 1 \text{ с}$$

**5.** На горизонтальной доске лежит мел. Коэффициент трения между доской и мелом  $k = 0,3$ . Доске резко сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = 5$  м/с, а через время  $\tau = 1$  с резко останавливают. Найти длину следа мела на доске. Считать, что при скольжении по доске мел оставляет след; если мел движется по уже оставленному следу, длина следа не увеличивается.

**Решение.** Когда доске резко сообщают скорость, мел начинает скользить по доске и движется с постоянным ускорением  $a = kg$  (причем движение мела относительно доски происходит в направлении, противоположном направлению движения доски). Если за то время, время пока доска движется, мел успевает приобрести скорость доски, то он проходит по доске путь  $S = \frac{v_0^2}{2kg}$ , а

далее движется вместе с доской. Поэтому след на доске имеет длину  $S$ . Если теперь доску мгновенно остановить, мел будет двигаться относительно доски в противоположную сторону, и пройдет точно такой же путь до остановки (т.к. его начальная скорость и ускорение такие же). Поэтому мел остановится в той же точке, где он находился до сообщения доске скорости, и, следовательно, длина следа и равна

$$S = \frac{v_0^2}{2kg} \quad (*)$$

Если время  $\tau$  мало ( $\tau < v_0/kg$ ), то мел не успевает приобрести скорость доски, а до остановки проходит расстояние

$$S_1 = v_0 \tau - \frac{kg \tau^2}{2} \quad (**)$$

Которое меньше, чем расстояние (\*). Если теперь доску остановить, то мел относительно доски будет иметь скорость  $kg\tau$  и пройдет в обратную сторону до остановки следующий путь

$$S_2 = \frac{kg \tau^2}{2} \quad (***)$$

Поскольку  $kg\tau < v_0$ , то «обратный» путь мела по доске  $S_2$  меньше «прямого», поэтому длина следа на доске равна  $S_1$  (\*\*).

Итак, длина следа мела на доске определяется формулой (\*), если  $\tau > v_0/kg$ , и формулой (\*\*), если  $\tau < v_0/kg$ . В первом варианте:  $\tau = 1$  с,  $k = 0,3$ ,  $v_0 = 5$  м/с. Поэтому  $\tau < v_0/kg$ . Длина

$$\text{следа } S_1 = v_0\tau - \frac{kg\tau^2}{2} = 3,5 \text{ м}$$