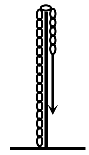
2.4. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

1. На шероховатом горизонтальном столе находятся два тела массами $m=1$ кг и $2m$, связанные невесомой ниткой. Нитка разрывается, если к телу массой m прикладывают минимальную силу $F_1=200$ Н. Какую минимальную силу следует приложить к другому телу чтобы нить разорвалась? Коэффициенты трения между телами и поверхностью одинаковы и равны $\mu=0,3$.

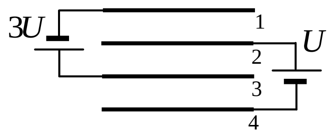
2. Феррари, Мерседес и Жигули движутся с постоянными скоростями по прямой дороге. Когда Мерседес и Жигули находились в одной точке, Феррари был на расстоянии S позади. Когда Феррари догнал Жигули, Мерседес был впереди них на расстоянии $2S/3$. На каком расстоянии позади Феррари и Мерседеса окажутся Жигули в тот момент, когда Феррари догонит Мерседес?

3. Тепловой насос, работающий по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_1=0°$ С нагревателю с водой при температуре $t_2=100°$ С. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m=1$ кг воды в нагревателе? Удельная теплота плавления льда - $\lambda=3,4\cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды - $r=2,3\cdot 10^6$ Дж/кг.

4. Около тонкой гладкой вертикальной стенки лежит цепочка с очень мелкими звеньями длинной l и массой m. Высота стенки меньше длины цепочки и равна $5l/6$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы втащить цепочку на стенку так, как показано на рисунке?



5. Четыре параллельные пластины находятся на равных расстояниях друг от друга. Пластины попарно подключают к источникам напряжения U и $3U$ как это показано на рисунке. Найти разность потенциалов между пластинами 2 и 3 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_3$. Краевыми эффектами пренебречь.



Ответы и решения

1. Поскольку $F_1>3\mu mg$, разрыв нити произойдет в процессе движения тел. Поэтому второй закон Ньютона для тел при приложении силы F к телу массой m, дает

$$ma=F-T-\mu mg$$
$$2ma=T-2\mu mg$$

где a - ускорение тел, T - сила натяжения нити. Отсюда находим

$$T=\frac{2F}{3}$$

Поскольку нить рвется, когда сила, действующая на тело массой m, равна F_1, то максимальная сила натяжения, которую выдерживает нить T_0, равна

$$T_0 = \frac{2F_1}{3}$$

Если сила приложена ко второму телу, то

$$ma = T - \mu mg$$
$$2ma = F - T - 2\mu mg$$

Отсюда

$$T = \frac{F}{3}$$

Нить порвется, если эта сила равна T_0. Поэтому значение силы, действующей на тело массой $2m$, при которой порвется нить, равно

$$F = 2F_1$$

Эта сила не зависит от трения.

2. Из условия понятно, что для скоростей выполнены неравенства $v_Ж < v_М < v_Ф$. В системе отсчета, связанной с Жигулями, Феррари и Мерседес едут в ту же сторону со скоростями $v_Ф - v_Ж$ и $v_М - v_Ж$ соответственно, причем $v_М - v_Ж < v_Ф - v_Ж$. В этой системе отсчета имеем для момента, когда Феррари догонит Жигули

$$\frac{S}{v_Ф - v_Ж} = \frac{d}{v_М - v_Ж}$$

(где $d = 2S/3$). Отсюда

$$\frac{S}{d} = \frac{v_Ф - v_Ж}{v_М - v_Ж}$$

Теперь можно найти расстояние от Жигулей до точки, в которой Феррари догонит Мерседес на расстоянии

$$x = \frac{S\left(v_М - v_Ж\right)}{\left(v_Ф - v_Ж\right) - \left(v_М - v_Ж\right)} = \frac{S}{\dfrac{v_Ф - v_Ж}{v_М - v_Ж} - 1}$$

(и которое от системы отсчета не зависит). Подставляя в эту формулу отношение скоростей Феррари и Мерседеса, находим расстояние от Жигулей до Феррари и Мерседеса

$$x = \frac{Sd}{S - d}$$

Подставляя в эту формулу $d = 2S/3$, получаем окончательно

$$x = 2S$$

3. Тепловой насос, работающий по любому обратному циклу, забирает некоторое количество теплоты у холодного тела (холодильника) и передает его горячему телу, совершая некоторую работу A (которая тоже передается нагревателю)

$$Q_н = A + Q_х$$

При этом переданное нагревателю количество теплоты и работа связаны определением КПД прямого цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_н}$$

Отсюда находим связь количества теплоты, взятого насосом у холодильника и переданного нагревателю

$$Q_н = \frac{Q_x}{1-\eta}$$

Используя далее формулу для КПД цикла Карно, получим

$$Q_н = \frac{T_н Q_x}{T_x}$$

где $T_н$ и T_x - абсолютные температуры нагревателя и холодильника данного цикла Карно. Для испарения в нагревателе $m=1$ кг воды необходимо количество теплоты $Q_н = rm$, где r - удельная теплота парообразования. Для этого холодильник должен отдать количество теплоты

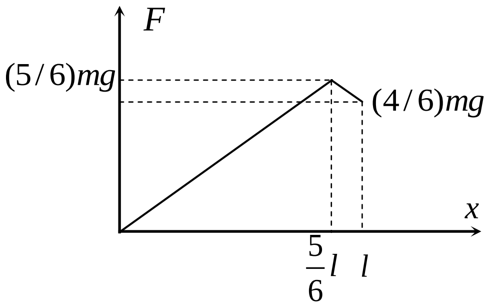
$$Q_x = \frac{T_x rm}{T_н}$$

А для этого должно замерзнуть

$$m_1 = \frac{Q_x}{\lambda} = \frac{T_x rm}{T_н \lambda} = 4{,}95 \text{ кг}$$

воды в холодильнике.

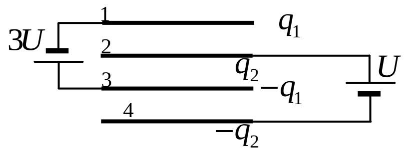
4. Поскольку цепочку поднимают медленно, то сила, которой необходимо действовать на ее конец должна компенсировать силу тяжести, действующую на поднятые звенья. Поэтому эта сила меняется в процессе движения и для вычисления работы будем использовать графический метод.



Построим график зависимости внешней силы F от величины перемещения конца цепочки x. График начинается из нуля (когда цепочка целиком лежит на полу, ее можно начать поднимать, фактически, нулевой силой). Когда перемещение конца равно высоте стенки, масса поднятой части цепочки равна $5m/6$, сила равна $5mg/6$. При дальнейшем перемещении конца цепочки за стенку сила будет уменьшаться, поскольку перетянутый за стенку кусочек цепочки будет компенсировать определенную долю силы тяжести, действующей на другую часть цепочки. Очевидно, в конечный момент при перемещении конца цепочки l внешняя сила равна $4mg/6$ (см. рисунок). Вычисляя площадь под графиком, получим

$$A = \frac{17}{36} mgl$$

5. Пластины приобретут такие заряды, что разность потенциалов 1-3 будет равна $-3U$, разность потенциалов 2-4 будет равна U. Пусть заряды пластин 1 и 3 равны q_1 и $-q_1$, пластин 2 и 4 q_2 и $-q_2$ соответственно (см. рисунок). Для определенности считаем q_1 и q_2 положительными; если они как решения нижеследующих уравнений окажутся отрицательными, это будет означать, что проекция вектора напряженности электрического поля между пластинами на ось, направленную вертикально вниз, является отрицательной. Тогда проекции напряженности электрического поля между пластинами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 на ось, направленную вертикально вниз, соответственно равны



$$E_{1-2}=\frac{q_1}{S\varepsilon_0},\qquad E_{2-3}=\frac{q_1+q_2}{S\varepsilon_0},\qquad E_{3-4}=\frac{q_2}{S\varepsilon_0}$$

Тогда для разности потенциалов между пластинами 1 и 3, и 2 и 4 имеем

$$-3U=\frac{q_1 l}{S\varepsilon_0}+\frac{(q_1+q_2)l}{S\varepsilon_0},$$

$$U=\frac{(q_1+q_2)l}{S\varepsilon_0}+\frac{q_2 l}{S\varepsilon_0}$$

где S - площадь пластин, l - расстояние между ближайшими пластинами, ε_0 - электрическая постоянная. Решая эту систему уравнений, находим

$$q_1=-\frac{7US\varepsilon_0}{3l},\qquad q_2=\frac{5US\varepsilon_0}{3l}$$

Поэтому проекция вектора напряженности электрического поля между пластинами 2 и 3 на ось, направленную вертикально вниз, составляет

$$E_{2-3}=\frac{q_1+q_2}{S\varepsilon_0}=-\frac{2U}{3l},$$

а вектор напряженности направлен вертикально вниз. Поэтому

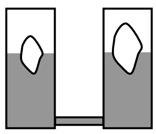
$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_3=-\frac{2U}{3}.$$

2.5. Очный отборочный тур олимпиады «Росатом», 11 класс

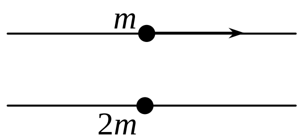
1. Два двухатомных газа A_2 и B_2, взятые в равном количестве молей, находятся в сосуде под давлением p. Происходит химическая реакция с образованием газообразного соединения A_2B. Известно, что образовалось максимально возможное количество этого газа. Какое давление будет в сосуде при той же температуре после прохождения реакции?

2. Несколько одинаковых тел спускаются с парашютом с установившейся скоростью v_1. Когда одно тело оторвалось, установилась скорость падения v_2. Какая установится скорость, если оторвется еще одно тело? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости и определяется только парашютом - тела вклада в силу сопротивления воздуха не дают.

3. Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены тонкой трубкой. В сосуды налита вода. Затем в сосуды опускают два тела: в один - тело объема V и плотности ρ/n, в другой - объема $3nV$ и плотности $\rho/2n$ (ρ - плотность воды, $n>1$ - известное число). Какой объем воды протечет при этом по трубке?



4. Две маленькие шайбы массой m и $2m$ заряжены зарядами q и $-q$. Шайбы могут двигаться без трения по двум бесконечным параллельным спицам (см. рисунок), расположенным на расстоянии d друг от друга. В начальный момент шайбы покоятся. Затем шайбе с массой m сообщают такую скорость, что она уходит от второй шайбы на бесконечно большое расстояние. Какую максимальную скорость может приобрести при этом шайба с массой $2m$?



5. Два мальчика, находящиеся на расстоянии l друг от друга, одновременно и с одинаковыми начальными скоростями v_0 бросают друг другу мячи, которые, не сталкиваясь в воздухе, попадают точно в руки партнера. Найти минимальное расстояние между мячами в процессе движения. Мячи точечные, силой сопротивления воздуха пренебречь.

Ответы и решения

1. Пусть в сосуде находятся ν молей вещества A_2 и ν молей вещества B_2. Уравнение реакции

$$2A_2 + B_2 = 2A_2B$$

показывает, что каждый моль вещества B_2 реагирует с двумя молями вещества A_2. Поэтому в нашем случае вещество A_2 (ν молей) прореагирует полностью с половиной вещества B_2 (с $\nu/2$ молей). После прохождения реакции в сосуде будет столько же молей соединения A_2B, сколько было в сосуде вещества A_2 (т.е. ν молей) и половина бывшего в сосуде вещества B_2 ($\nu/2$ молей).

Поэтому в сосуде останется $3\nu/2$ моля газов. Из закона Дальтона для начальной и конечной смесей

$$p = \frac{2\nu RT}{V} \text{ и } p_1 = \frac{1,5\nu RT}{V}$$

заключаем, что

$$p_1 = \frac{3}{4}p$$

2. Для установившейся скорости падения в первом и втором случае имеем

$$\begin{aligned} kv_1^2 &= Nmg \\ kv_2^2 &= (N-1)mg \\ kv_3^2 &= (N-2)mg \end{aligned}$$

где k - коэффициент пропорциональности силы сопротивления воздуха и скорости, N - количество тел, m - масса одного тела, v_3 - искомая скорость. Вычитая второе уравнение из первого, получим для k

$$k = \frac{mg}{v_1^2 - v_2^2}$$

А, вычитая третье из второго, найдем

$$kv_2^2 - kv_3^2 = mg, \qquad \Rightarrow \qquad v_3^2 = v_2^2 - \frac{mg}{k} = v_2^2 - \left(v_1^2 - v_2^2\right) = 2v_2^2 - v_1^2$$

Или

$$v_3 = \sqrt{2v_2^2 - v_1^2}$$

При этом для данных скоростей должно быть выполнено условие $v_1 < \sqrt{2}v_2$.

3. Если бы трубки не было, то уровень воды в сосудах изменился бы. Первое тело будет погружено в воду на $1/n$ часть своего объема и, следовательно, вытеснит объем V/n воды. Второе тело будет погружено в воду на $1/2n$ часть объема и, следовательно, вытеснит объем $3V/2$ воды. Поэтому, если площадь сечения сосудов S, то подъем уровня воды в первом сосуде составил бы (в отсутствие трубки)

$$\Delta h_1 = \frac{V}{nS},$$

а во втором -

$$\Delta h_2 = \frac{3nV}{2nS} = \frac{3V}{2S}$$

Если теперь соединить сосуды трубкой, то вода перетечет из того сосуда, где уровень выше в тот сосуд, где уровень ниже, и в сосудах установится одинаковый уровень воды. А поскольку площади сосудов одинаковы, то подъем уровня в одном сопровождается точно таким же опусканием уровня в другом сосуде. Очевидно, уровень воды в первом сосуде поднимется ниже, чем во втором. Поэтому из второго сосуда вода перетечет следующий объем воды

$$\Delta V = \frac{(\Delta h_2 - \Delta h_2)S}{2} = \frac{(3n-2)V}{4n}$$

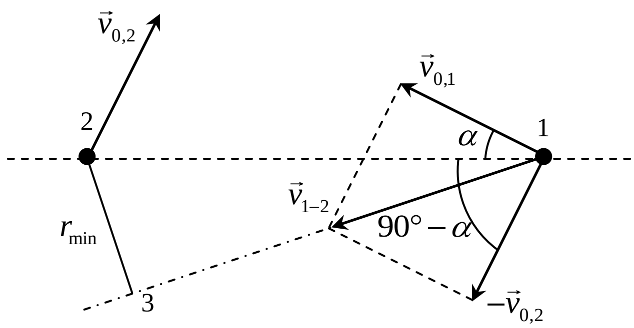
4. При движении заряда по спице он, благодаря кулоновскому притяжению, будет тянуть за собой второй заряд, и, следовательно, через некоторое время оба заряда будут двигаться направо. Если при этом начальная скорость верхнего заряда – большая, он быстро улетит от нижнего заряда и не успеет его сильно разогнать. Если его начальная скорость меньше, он будет взаимодействовать с нижним зарядом дольше, и сильнее его разгонит. Поэтому скорость нижнего заряда будет тем больше, чем меньше начальная скорость верхнего заряда. Но «снизу» она ограничена условием, что верхний заряд должен покинуть область притяжения нижнего. Поэтому скорость нижнего заряда будет максимальна, при условии, что верхний имеет минимальную скорость, при которой он покинет область притяжения нижнего. А минимальной скорости покидания будет отвечать ситуация, когда при бесконечно большом расстоянии между зарядами, они имеют одинаковые скорости. Поэтому законы сохранения энергии и импульса дают для этого случая

$$mv_0 = mv_1 + 2mv_1 = 3mv_1$$
$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{kq^2}{d} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2mv_1^2}{2} = \frac{3mv_1^2}{2}$$

где v_0 - минимальная начальная скорость верхнего заряда, при которой он покинет область притяжения нижнего, v_1 - искомая максимальная скорость нижнего заряда (и одновременно верхнего при условии максимальности скорости нижнего), k - постоянная закона Кулона, d - начальное расстояние между зарядами, равное расстоянию между спицами. Решая систему уравнений, получим максимальную скорость нижнего заряда при том, что верхний уходит от нижнего на бесконечно большое расстояние

$$v_1 = \sqrt{\frac{kq^2}{3md}}$$

5. Поскольку мячи не сталкиваются, а дальность полета у них одинакова, то если один из них бросают под углом α, другой – под углом $90° - \alpha$ (для определенности будем считать, что тело с номером 1 брошено под углом α, который меньше $45°$, а тело под номером 2 брошено под углом $90° - \alpha$, который больше $45°$ - см. рисунок).



Пусть начальная скорость мячей равна v_0. Из закона сложения скоростей следует, что относительная скорость мячей не зависит от времени

$$\vec{v}_{1-2} = \vec{v}_{0,1} + \vec{g}t - (\vec{v}_{0,2} + \vec{g}t) = \vec{v}_{0,1} - \vec{v}_{0,2}.$$

причем векторы $\vec{v}_{0,1}$ и $\vec{v}_{0,2}$ направлены под углом $90°$ друг к другу (см. рисунок). Поэтому вектор скорости первого тело относительно второго направлен так, как показано на рисунке, а его модуль равен $\sqrt{2}v_0$. Поэтому в системе отсчета, связанной со вторым телом, первое тело движется по штрих-пунктирной прямой, и минимальному расстоянию между телами отвечает перпендикуляр, опущенный из второго тела на эту прямую ($r_{\min}$ на рисунке) при условии, что в этот момент времени, первое тело еще не успело попасть в конечную точку. Выполнимость последнего условия можно проверить непосредственно. Время движения первого тела до конечной точки определяется соотношением

$$t_1 = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$$

А время движения до точки 3 соотношением

$$t_2 = \frac{l\cos\left(45° - \alpha\right)}{\sqrt{2}v_0} = \frac{l}{v_0\left(\sqrt{2}/\cos\left(45° - \alpha\right)\right)}$$

Очевидно, $t_2 < t_1$, поскольку $\sqrt{2}/\cos\left(45° - \alpha\right) > \cos\alpha$ (первая величина больше единицы, вторая – меньше).

Найдем теперь расстояние $r_{\min}$. Очевидно, $r_{\min} = l\sin\left(45° - \alpha\right)$. С другой стороны, используя формулу для дальности полета теля, брошенного под углом к горизонту, имеем

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = l \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2\alpha = \frac{gl}{v_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right)$$

Поэтому

$$r_{\min} = l\sin\left(45° - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right)\right) = l\sin\left(\frac{90° - \arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right)}{2}\right) = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos\left(90° - \arcsin\left(\frac{gl}{v_0^2}\right)\right)} = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{gl}{v_0^2}}$$

Таким образом

$$r_{\min} = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{gl}{v_0^2}}$$

(Существует и другое решение этой задачи – простое идеологически, да и технически менее сложное – найти расстояние между мячами как функцию времени, а затем минимум этой функции. Естественно, получается тот же ответ).