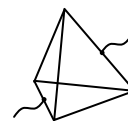


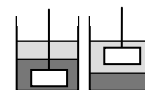
5.2.5. Обнинск, 11 класс (заключительный этап олимпиады «Росатом»)

1. В открытом вертикальном цилиндре с площадью сечения S под массивным поршнем находится идеальный газ под давлением p . Поршень плотно притерт к стенкам цилиндра, но может скользить вдоль них без трения. Цилиндр переворачивают вверх дном. При этом поршень опускается так, что объем газа в цилиндре увеличивается вдвое. Найти атмосферное давление и массу поршня. Температура газа в цилиндре не изменяется.

2. Из проволоки сделали правильную пирамиду, все ребра которой имеют одинаковую длину и одинаковое сопротивление R . К серединам двух противоположных сторон подключают источник электрического напряжения (см. рисунок). Чему равно сопротивление пирамиды?



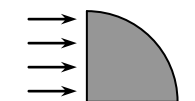
3. В цилиндрический сосуд наливают одинаковые объемы несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ и $0,3\rho$. Тело, объем которого в 3 раза меньше объема каждой жидкости и которое тонет в обеих жидкостях, опускают в сосуд на длинной нити. Найти отношение давлений p_1/p_2 жидкости около дна сосуда в положениях, когда тело полностью погружено либо в нижнюю (p_1), либо в верхнюю (p_2) жидкость.



4. Имеются три шара с массами m , μ и $2m$. Шар массой $2m$ движется, остальные шары покоятся (см. рисунок). Происходят центральные упругие столкновения шаров. При каком значении массы μ шар массой m будет иметь после столкновения с шаром μ максимальную скорость.



5. На горизонтальной поверхности лежит стеклянная линза в форме четверти цилиндра радиуса R (см. рисунок). Показатель преломления стекла n . Параллельный пучок световых лучей падает на линзу перпендикулярно ее вертикальной грани. На каком расстоянии от линзы на горизонтальной поверхности будет наблюдаться световое пятно из преломленных линзой лучей?



Ответы и решения

1. Условия равновесия поршня в цилиндре в «нормальном» и «перевернутом» состояниях дают

$$\begin{aligned}mg + p_0 S &= p S \\ mg + (p/2) S &= p_0 S\end{aligned}$$

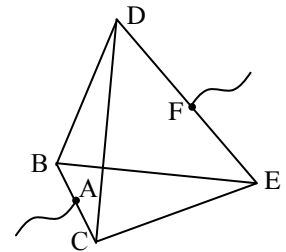
где p_0 - атмосферное давление, p - давление газа в сосуде до переверота поршня, $p/2$ - после (по условию, температура не изменилась, а объем увеличился вдвое).

Складывая и вычитая уравнения, получим

$$m = \frac{pS}{4g}, \quad p_0 = \frac{3}{4} p$$

2. Из симметрии цепи следует, что в каждом разветвлении ток делится пополам. Поэтому, если в точку А втекает ток I , сопротивление одного ребра R , то напряжения на всех проводниках, составляющих ребра тетраэдра являются следующими:

$$\begin{aligned}U_{AB} &= U_{AC} = IR/4, \\ U_{CD} &= U_{CE} = U_{BE} = U_{BD} = IR/4, \quad U_{DF} = U_{EF} = IR/4.\end{aligned}$$



Поэтому напряжение между точками А и F равно

$$U_{AF} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DF} = \frac{3IR}{4}$$

Отсюда находим, что сопротивление тетраэдра равно $3R/4$.

3. Поскольку на жидкость со стороны тела действует сила, равная весу жидкости в объеме тела, то для вычисления давления жидкости, в которой находится тело, можно мысленно заменить тело жидкостью и вычислять ее давление. Поэтому в первом случае давление жидкости около дна сосуда равно давлению двух столбов жидкости – плотности ρ с объемом $1,33V$ и плотности $0,3\rho$ с объемом V (V - объем жидкости). Во втором случае давление жидкости равно давлению двух столбов жидкости – плотности ρ с объемом V и плотности $0,3\rho$ с объемом $1,33V$. Поэтому

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho g (1,33V/S) + 0,3\rho (V/S)}{\rho g (V/S) + 0,3\rho (1,33V/S)} = 1,16$$

4. Законы сохранения энергии и импульса для первого столкновения позволяют найти скорость среднего шара после первого столкновения

$$v_1 = \frac{2v}{1 + \frac{\mu}{2m}}$$

Из этой формулы легко найти и скорость левого шара после столкновения со средним (заменить $v \rightarrow v_1$, $\mu \rightarrow m$, $2m \rightarrow \mu$)

$$v_2 = \frac{4v}{\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)\left(1 + \frac{\mu}{2m}\right)} = \frac{4v}{\frac{3}{2} + \left(\frac{m}{\mu} + \frac{\mu}{2m}\right)}$$

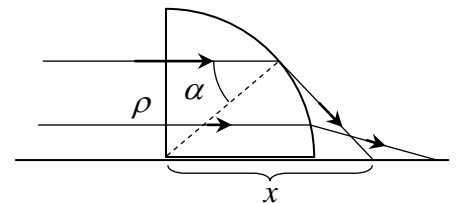
Очевидно, v_2 максимальна, когда минимальна скобка в знаменателе. Ее минимум находим, дифференцируя по μ и приравнявая производную к нулю. Получаем

$$\mu = \sqrt{2m}$$

5. Рассмотрим сначала луч, падающий не «край» линзы. Очевидно, этот луч испытает полное внутреннее отражение и не выйдет из линзы. Уменьшая прицельный параметр падающего луча, мы дойдем до луча, который выйдет из линзы. Первым выйдет из линзы тот луч, который попадет на ее внутреннюю поверхность под углом полного внутреннего отражения, определяемого из условия

$$\sin \alpha = \frac{1}{n}$$

Т.е. прицельный параметр этого луча (см. рисунок) будет определяться соотношением $\rho = R \sin \alpha = R/n$, а преломленный луч будет перпендикулярен поверхности цилиндра в точке его выхода. Поэтому расстояние от центра линзы до точки падения луча на горизонтальную поверхность x (см. рисунок) определяется соотношением



$$x = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Отсюда следует, что расстояние от линзы до точки падения этого луча на горизонтальную поверхность равно

$$\Delta x = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}} - R = \frac{R(n - \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (*)$$

Любой луч, имеющий меньший прицельный параметр, будет преломляться меньше, и потому точка его падения на горизонтальную поверхность будет находиться

дальше от линзы (см. рисунок). Поэтому светлое пятно на поверхности начнется на расстоянии (*) от линзы (кроме того, под линзой будет светлый участок из-за лучей, имеющих больший прицельный параметр, чем $\rho = R \sin \alpha$, и которые выйдут из линзы только под ней).

Рассмотрим теперь луч, падающий на линзу вблизи главной оптической оси. Для такого луча из-за малости прицельного параметра

$$\rho = R \sin \alpha \approx R \alpha$$

Угол его преломления β (который тоже мал)

находится из условия

$$n \sin \alpha = \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = n \alpha$$

Очевидно, этот луч повернет на угол

$$\beta - \alpha = \alpha(n - 1) = \frac{\rho(n - 1)}{R}.$$

Поэтому расстояние от точки падения этого луча на горизонтальную поверхность до линзы y (см. рисунок) определяется соотношением

$$y = \frac{\rho}{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)} = \frac{\rho}{\beta - \alpha} = \frac{R}{n - 1} \quad (**)$$

А так как расстояние (**) не зависит от прицельного параметра, то даже луч с прицельным параметром $\rho \rightarrow 0$ не будет уходить на бесконечность, а будет падать на поверхность на расстоянии (**) от линзы. Поэтому светлое пятно будет наблюдаться на расстояниях, больших, чем (*) и меньших, чем (**) от линзы.

