5.2.4. Москва (НИЯУ МИФИ), Липецк 11 класс (заключительный этап олимпиады «Росатом»)

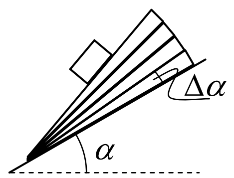
1. Горизонтальный цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен подвижным поршнем на две части. Газ в левой части имеет температуру T_1, в правом - температуру T_2. При этом отношение объемов оказывается равным $V_1/V_2 = 3/2$. После того как температуры выровнялись, соотношение объемов изменилось: $V_1'/V_2' = 2/3$. Найти отношение температур T_1/T_2.

2. Три одинаковых точечных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между двумя зарядами, равна E. Найти потенциал электрического поля в этой точке.

3. Ширина реки равна l. Если лодка плывет против течения реки, ее скорость относительно земли равна v (и направлена против течения), если по течению - $3v$. За какое минимальное время лодка может пересечь реку?

4. (Л.Эйлер, статья «Об ударе пуль при стрельбе по доске», 1771 г.) В центр квадратной свободно висящей доски попадает пуля. Пуля пробивает доску насквозь, если ее скорость до удара больше v_0. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули до удара $2v_0$? Масса пули m, доски M, силу сопротивления считать независящей от скорости.

5. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, $\Delta\alpha$ лежит стопка из 10 одинаковых по форме клиньев с малым углом при вершине $\Delta\alpha$ (см. рисунок; клинья нарисованы не все). По поверхности верхнего клина скользит тело массой M. Найти силу, действующую на наклонную плоскость со стороны стопки клиньев, если известно, что все они покоятся, а трение между всеми поверхностями отсутствует.



Ответы и решения

1. Условие равновесия перегородки в начальном положении дает

$$\frac{\nu_1 RT_1}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_2}{V_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} \qquad (*)$$

где ν_1 и ν_2 - количество вещества газа в левой и правой частях сосуда. После выравнивания температур (неважно, с потерей энергии, или нет) условие равновесия перегородки дает

$$\frac{\nu_1 RT}{V_1'} = \frac{\nu_2 RT}{V_2'} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \qquad (*)$$

Откуда, используя (*), получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1 V_2'}{V_2 V_1'} = \frac{9}{4}$$

2. Напряженность электрического поля в рассматриваемой точке равна (поля двух зарядов складываются в нуль)

$$E = \frac{4kQ}{3a^2}$$

где k - постоянная закона Кулона. Отсюда

$$\frac{kQ}{a} = \frac{3Ea}{4}$$

Потенциал поля в рассматриваемой точке есть

$$\varphi = \frac{kQ}{\sqrt{3}a/2} + \frac{kQ}{a/2} + \frac{kQ}{a/2} = \frac{2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}} \frac{kQ}{a} = \frac{\left(6+\sqrt{3}\right)Ea}{2}$$

3. Из условия следует, что

$$3v = w + u$$
$$v = w - u$$

где w - скорость лодки относительно воды, u - скорость течения. Отсюда находим, что $w = 2v$. Чтобы переправится за минимальное время лодка должна плыть так, чтобы вектор ее скорости относительно воды был перпендикулярен берегам реки. Поэтому минимальное время переправы равно

$$t_{\min} = \frac{l}{w} = \frac{l}{2v}$$

4. Для скорости v_0 законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv_0 = (m+M)v_1$$
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v_1^2}{2} + Q$$

где v_1 - скорость пули и доски (одинаковая, поскольку v_0 минимальная для пробивания доски скорость), Q - количество выделившейся теплоты. Отсюда

$$Q=\frac{mMv_0^2}{2(m+M)} \qquad (*)$$

Поскольку сила сопротивления по условию не зависит от скорости, работа силы трения (и, следовательно, количество выделившейся теплоты) не зависит от скорости пули. Поэтому в случае, когда пуля имеет скорость $v=2v_0$, законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv=mv_1+Mv_2$$
$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}+Q$$

Выражая из первого уравнения v_1 и подставляя во второе, получим уравнение для v_2

$$v_2^2-\frac{2mv}{m+M}v_2+\frac{2mQ}{M(m+M)}=0$$

Решая квадратное уравнение (с Q из (*)), получим

$$v_2=\frac{m}{m+M}\left(v\pm\sqrt{v^2-v_0^2}\right)$$

(очевидно, нужно взять «-», т.к. при $v=v_0$ должно получиться

$$v_2=v_1=\frac{mv_0}{m+M}$$

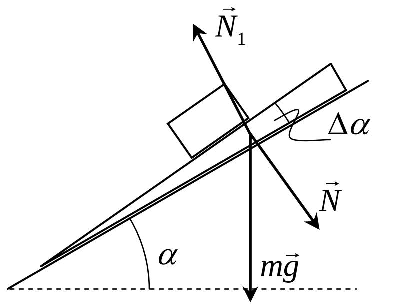
Поэтому

$$v_2=\frac{m}{m+M}\left(v-\sqrt{v^2-v_0^2}\right)$$

Если $v=2v_0$, то

$$v_2=\frac{mv_0}{m+M}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

5. Рассмотрим один клин с углом $\Delta\alpha$, находящийся в равновесии на гладкой наклонной плоскости с углом при основании α, по которому скользит тело. На клин действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ (m - масса клина), сила реакции со стороны тела $\vec{N}$ ($N=Mg\cos(\alpha+\Delta\alpha)$, M - масса тела), перпендикулярная его верхней грани, сила реакции $\vec{N}_1$, перпендикулярная его нижней грани. И поскольку клин находится в равновесии, то из проекции условия равновесия на ось, параллельную нижней поверхности клина, имеем



$$mg\sin\alpha = N\sin\Delta\alpha$$

Отсюда находим, что

$$m = \frac{N\sin\Delta\alpha}{\sin\alpha}$$

С другой стороны, проецируя условие равновесия клина на ось, перпендикулярную нижней поверхности клина, находим силу N_1, с которой клин действует на плоскость

$$N_1 = N\cos\Delta\alpha + mg\cos\alpha$$

Подставляя сюда массу клина, получим

$$N_1 = N\cos\Delta\alpha + \frac{N\sin\Delta\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{N\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin\alpha}$$

Если бы в равновесии на плоскости было два клина, на верхнем из которых двигалось тело, то сила, с которой нижний клин действовал бы на плоскость, находилась бы так

$$N_2 = \frac{N_1\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{N\sin(\alpha+2\Delta\alpha)}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{N\sin(\alpha+2\Delta\alpha)}{\sin\alpha}$$

где $N = Mg\cos(\alpha+2\Delta\alpha)$ - сила реакции, действующая на тело. Поэтому если клиньев 10, то сила, с которой нижний клин действует на плоскость, может быть найдена так

$$N_{10} = \frac{N\sin(\alpha+10\Delta\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{Mg\cos(\alpha+10\Delta\alpha)\sin(\alpha+10\Delta\alpha)}{\sin\alpha}$$