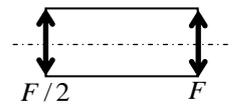


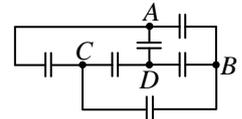
5.2. Заключительный этап

5.2.1. Снежинск, Лесной, Калининград, Озерск, Железногорск, Зеленогорск, Северск, Тамбов, 11 класс (Заключительный тур олимпиады Росатом)

1. Две собирающие линзы одинакового диаметра вставлены в трубу с зачерненными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой, и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу падает пучок параллельных лучей одинаковой интенсивности сначала слева, а потом справа. Найти отношение освещенностей экрана, расположенного соответственно справа и слева от трубы.

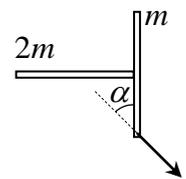


2. Дана цепь, содержащая 6 конденсаторов – пять из них одинаковы, конденсатор между контактами С и D имеет вдвое меньшую емкость. К какой паре контактов А-В, А-С, А-D, В-С, В-D или С-D нужно подключить источник напряжения, чтобы хотя бы один из конденсаторов схемы оказался незаряженным? Ответ обосновать.



3. Какую максимальную работу можно совершить, используя айсберг массой $3 \cdot 10^6$ т в качестве холодильника и океан в качестве нагревателя. Считать, что температура айсберга равна $t_1 = 0^\circ \text{C}$, воды в океане $t_2 = 12^\circ$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

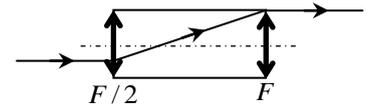
4. Две тонкие палочки одинаковой длины с массами m и $2m$ образуют букву «Г» (палочка с массой $2m$ прикреплена к середине палочки с массой m под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К одному из концов палочки m привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол α составляет палочка m с нитью.



5. Имеется жидкая планета в форме однородного шара радиуса R , плотности ρ . найти давление в центре планеты, обусловленное гравитационным притяжением.

Ответы и решения

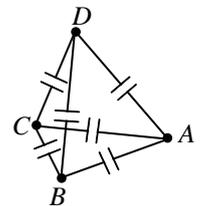
1. Чтобы пучок оставался параллельным, у линз должны совпадать фокусы. При падении лучей на левую линзу на правую линзу попадут лучи, идущие на расстоянии, не



большем половине радиуса левой линзы. Поэтому на площадь, равную площади падающего пучка, придется одна четверть его энергии (остальная попадет на боковые стенки трубы). При падении лучей справа, луч, идущий через край правой линзы, окажется на расстоянии, равном половине радиуса левой. Поэтому вся энергия пучка придется на вчетверо меньшую площадь. Поэтому

$$\frac{W_{\text{правый экран}}}{W_{\text{левый экран}}} = \frac{1}{16}$$

2. Легко видеть, что данная на рисунке схема эквивалентна схеме, в которой провода расположены вдоль ребер тетраэдра, и в каждое ребро включен один конденсатор. При подключении источника напряжения к двум вершинам (например, А и В) конденсаторы, находящиеся на ребрах, связывающих эти вершины, будут заряжаться. Это конденсаторы, включенные в ребра АВ, АС и СВ, АД и ДВ. А вот будет ли заряжаться конденсатор CD зависит от потенциалов точек D и C – если их потенциалы одинаковы, он заряжаться не будет. А чтобы их потенциалы были одинаковы, нужно чтобы участки А-D-В А-С-В были одинаковы. А это возможно, если конденсатор половинной емкости включен либо между точками А и В, либо D и C. Таким образом, если подключить источник к клеммам С и D, или А и В, то один из конденсаторов схемы будет не заряжен. При всех остальных включениях все конденсаторы будут заряжены.



3. Чтобы работа теплового двигателя для фиксированных холодильника и нагревателя была максимальна, нужно, чтобы двигатель работал по циклу Карно. КПД цикла Карно есть

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$$

где T_1 и T_2 - абсолютные температуры холодильника и нагревателя соответственно.

При этом двигатель совершает работу $A = \eta Q$ - где Q - количество теплоты, полу-

ченное от нагревателя, и отдает холодильнику количество теплоты $Q_1 = (1-\eta)Q$. Отсюда получаем, что

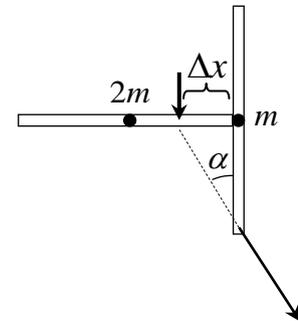
$$A = \frac{\eta Q_1}{1-\eta} = \frac{(T_2 - T_1) Q_1}{T_1}$$

Поскольку холодильником является айсберг, который плавится при получении тепла, то величина Q_1 не может превосходить λm , где λ - удельная теплота плавления льда, m - масса айсберга. Поэтому максимальная работа двигателя равна

$$A = \frac{\eta Q_1}{1-\eta} = \frac{(T_2 - T_1) \lambda m}{T_1} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

4. Поскольку палочки движутся медленно, сумма сил и сумма моментов всех сил, действующих на палочки, равна нулю. Это значит, что момент силы трения относительно точки приложения внешней силы должен быть равен нулю. А поскольку силы трения, приложенные к различным малым элементам палочек, пропорциональны их массам и одинаково направлены, для вычисления момента силы трения можно воспользоваться тем же приемом, что и для вычисления момента силы тяжести: считать, что сила трения приложена к центру тяжести палочек. Поэтому линия действия внешней силы должна проходить через центр тяжести палочек.

Найдем положение их центра тяжести. Для этого заменим палочки точечными массами, расположенными в их центрах, и найдем их центр тяжести. Так как масса «перекладины» буквы «Г» вдвое меньше массы ее «ножки», расстояние Δx от середины «перекладины» до центра тяжести палочек составит $2/3$ расстояния от середины «перекладины» до середины «ножки» (см. рисунок, центр тяжести палочек отмечен стрелкой):



$$\Delta x = \frac{2}{3} \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l/3}{l/2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{3} \right)$$

5. Рассмотрим тонкий сферический слой радиуса r , толщиной Δr . Он притягивается к «внутренней» части планеты с силой

$$\Delta F = G \frac{\Delta m M r}{R^3} = G \frac{M 4\pi r^3 \Delta r \rho}{R^3}$$

(ρ - плотность вещества планеты, M - ее масса, Δm - масса слоя) и создает дополнительное давление величиной

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} = \frac{\Delta F}{4\pi r^2} = G \frac{M \rho r \Delta r}{R^3}$$

Чтобы найти давление в центре нужно просуммировать все давления от всех слоев

$$p = \sum \Delta p = G \frac{M \rho}{R^3} \sum r \Delta r$$

причем r здесь меняется от нуля до R . Такая же сумма возникает при нахождении работы силы упругости – следовательно, она равна $R^2/2$. Поэтому давление в центре планеты

$$p = G \frac{M \rho}{2R}$$