

**Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019**  
**9 класс**

**Вариант №1**

1. Бригада из четырёх человек укладывает трубу длиной 50 м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные трое сообща выкопали бы три четверти траншеи. Траншея длиной 50 м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если бы работали все вместе?

2. Решить систему 
$$\begin{cases} x^2 + 3y + z = -8 \\ x + y^2 + 5z = -12 \\ x + y + z^2 = 6 \end{cases}$$

3. Натуральное число  $a$  кратно 15 и имеет 63 различных делителей, включая единицу и  $a$ . Найдите наименьшее такое  $a$ .

4. При каких  $p$  квадратные уравнения  $x^2 + (p - 1)x - (p + 2) = 0$  и  $x^2 + (p + 2)x + 2p - 1 = 0$  имеют общий корень? Найти этот корень.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $G$ . Первая окружность имеет радиус 4 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке  $O$ , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку  $G$ , пересекает другую прямую в точке  $A$ . Прямая  $AO$  перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

## Вариант №2

1. Бригада из пяти человек укладывает трубу длиной 30м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные четверо сообща выкопали бы треть траншеи. Траншея длиной 30м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

2. Решить систему 
$$\begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 3x + y + z^2 = 14 \\ 7x - y^2 + 4z = 25 \end{cases}$$
$$-1, z = 3.$$

3. Натуральное число  $a$  кратно 21 и имеет 105 различных делителей, включая единицу и  $a$ . Найти наименьшее такое  $a$ .

4. При каких  $p$  квадратные уравнения  $x^2 - (p+1)x + (p+1) = 0$  и  $2x^2 + (p-2)x - p - 7 = 0$  имеют общий корень? Найти этот корень.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $G$ . Первая окружность имеет радиус 6 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке  $O$ , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку  $G$ , пересекает другую прямую в точке  $A$ . Прямая  $AO$  перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

### Вариант №3

1. Бригада из шести человек укладывает трубу длиной 40м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные пять сообща выкопали бы четверть траншеи. Траншея длиной 40м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

2. Решить систему 
$$\begin{cases} x - 3y + z = -4 \\ x - 3y + z^2 = -10 \\ 3x + y^2 - 3z = 0 \end{cases}$$

3. Натуральное число  $a$  кратно 35 и имеет 75 различных делителей, включая единицу и  $a$ . Найти наименьшее такое  $a$ .

4. При каких  $p$  квадратные уравнения

$$9x^2 - 3(p+6)x + 6p + 5 = 0 \text{ и } 6x^2 - 3(p+4)x + 6p + 14 = 0$$

имеют общий корень? Найти этот корень.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $G$ . Первая окружность имеет радиус 8 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке  $O$ , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку  $G$ , пересекает другую прямую в точке  $A$ . Прямая  $AO$  перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.

### Вариант №4

1. Бригада из семи человек укладывает трубу длиной 60м в землю. Для подготовки траншеи решили копать по очереди с условием: каждый копает столько времени, за которое остальные шесть сообща выкопали бы шестую часть траншеи. Траншея длиной 60м была выкопана, когда последний член бригады отработал положенное ему время. Сколько метров траншеи они могли бы выкопать за то же время, если работали все вместе?

2. Решить систему 
$$\begin{cases} x^2 - y - z = 8 \\ 4x + y^2 + 3z = -11 \\ 2x - 3y + z^2 = -11 \end{cases}$$

3. Натуральное число  $a$  кратно 55 и имеет 117 различных делителей, включая единицу и  $a$ . Найти наименьшее такое  $a$ .

4. При каких  $p$  квадратные уравнения  $x^2 - (p+2)x + 2p + 6 = 0$  и  $2x^2 - (p+4)x + 2p + 3 = 0$  имеют общий корень? Найти этот корень.

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $G$ . Первая окружность имеет радиус 2 и касается двух параллельных прямых. Вторая окружность имеет центр в точке  $O$ , касается одной из этих прямых, а общая касательная окружностей, проходящая через точку  $G$ , пересекает другую прямую в точке  $A$ . Прямая  $AO$  перпендикулярна параллельным прямым. Найти радиус второй окружности.