

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
7 класс, Москва, Россия, март 2020**

Вариант № 1

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 6 часов; 2) после 3- часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

2. Каждое из четырех чисел 2, 4, 12, 32 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

3. Представить число 2021 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ x^2 + z^2 - 4x - 6z = 0 \\ y^2 + z^2 + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

5. На плоскости нарисованы 81 отрезков, длиной 1; 2; ..., 81 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Вариант № 2

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 5 часов; 2) после 2 - часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

2. Каждое из четырех чисел 4, 18, 30, 144 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найдите эти числа.

3. Представить число 1917 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 6y = -5 \\ x^2 + z^2 + 2x - 4z = 8 \\ y^2 + z^2 + 6y - 4z = -3 \end{cases} .$$

5. На плоскости нарисованы 85 отрезков, длиной $1; 2; \dots; 85$ соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найдите наибольшее возможное значение его периметра.

Вариант № 3

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 7 часов; 2) после 3- часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

2. Каждое из четырех чисел 4, 24, 40, 256 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

3. Представить число 1947 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y = -20 \\ x^2 + z^2 + 8x + 4z = -10 \\ y^2 + z^2 - 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

5. На плоскости нарисованы 89 отрезков, длиной 1; 2; ..., 89 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Вариант № 4

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 8 часов; 2) после 4- часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

2. Каждое из четырех чисел 3, 32, 64, 768 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

3. Представить число 2019 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y = -12 \\ x^2 + z^2 - 6x - 2z = -5 \\ y^2 + z^2 - 8y - 2z = -7 \end{cases} .$$

5. На плоскости нарисованы 93 отрезка, длиной 1; 2; ..., 93 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.