

Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
10класс

Вариант № 1

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C , делая в минуту 60 шагов, с длиной шага 40 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 200 м от пункта C . Даня идет в C по дороге B со скоростью 70 шагов в минуту, с длиной шага 60 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 300 м от C . Каждый из них, пройдя пункт C , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких a уравнение $\sin(x + 3a) - \sin 7a \cdot \cos x = 0$ имеет два решения x_1 и x_2 , для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

3. При каких x уравнение $y^2 + 16z^2 + 4xyz - 3 = 0$ имеет решение при любых y ?

4. Натуральное число a имеет 101 различных делителей, включая 1 и a . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны $2\sqrt{3}$ и 4 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 1. Найти угол между прямыми BC и AD .

Вариант № 2

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C , делая в минуту 50 шагов, с длиной шага -50 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 250 м от пункта C . Даня идет в C по дороге B со скоростью 80 шагов в минуту, с длиной шага 40 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 300 м от C . Каждый из них, пройдя пункт C , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких a уравнение $\sin 5a \cdot \cos x - \cos(x + 4a) = 0$ имеет два решения x_1 и x_2 , для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

3. При каких x уравнение $x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2xyz - 4 = 0$ не имеет решений при любых z ?

4. Натуральное число a имеет 103 различных делителей, включая 1 и a . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 2 и $2\sqrt{2}$ соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 1. Найти угол между прямыми BC и AD .

Вариант № 3

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C , делая в минуту 40 шагов, с длиной шага -65 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 260 м от пункта C . Даяня идет в C по дороге B со скоростью 75 шагов в минуту, с длиной шага 50 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 350 м от C . Каждый из них, пройдя пункт C , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даяня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких a уравнение $\cos(x-a) - \sin(x+2a) = 0$ имеет два решения x_1 и x_2 , для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

3. При каких z уравнение $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xyz - 9 = 0$ имеет решение при любых y ?

4. Натуральное число a имеет 107 различных делителей, включая 1 и a . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 6 и 8 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 5. Найти угол между прямыми BC и AD .

Вариант № 4

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C , делая в минуту 45 шагов, с длиной шага -60 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 290 м от пункта C . Даня идет в C по дороге B со скоростью 55 шагов в минуту, с длиной шага 65 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 310 м от C . Каждый из них, пройдя пункт C , не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких a уравнение $\sin(x-a) + \cos(x+3a) = 0$ имеет два решения x_1 и x_2 , для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$?

3. При каких u уравнение $x^2 + 2y^2 + 8z^2 - 2xyz - 9 = 0$ не имеет решений при любых z ?

4. Натуральное число a имеет 109 различных делителей, включая 1 и a . Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 4 и 6 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 3. Найти угол между прямыми BC и AD .