

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
10 класс, Москва, Россия, март 2020**

Вариант № 1

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x) = \frac{ax - 5}{x + a - 2} ?$$

2. Каждое из четырех чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2$ является результатом

одной из четырех арифметических операций $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\sin x \cdot \sin y$, $\sin x : \sin y$ над числами $\sin x$, $\sin y$ для некоторых x и y . Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы
$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2y + 3z = a + 1 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$
 удо-

влетворяет уравнению $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 19$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2020, для которого $P(5) = 2019$, $P(6) = 2021$ и $P(4+x) = P(8-x)$ для всех x .

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC .

Вариант № 2

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x) = \frac{(2a+8)x-5}{2x-a} ?$$

2. Каждое из четырех чисел $-\sqrt{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\cos x + \cos y$, $\cos x - \cos y$, $\cos x \cdot \cos y$, $\cos x : \cos y$ над числами $\cos x$, $\cos y$ для некоторых x и y . Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы
$$\begin{cases} 2x+3y = a-1 \\ 3y+4z = a+1 \\ x+2z = a-2 \end{cases}$$
 удо-

влетворяет уравнению $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{49}{9}$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2019, для которого $P(2018) = 2020$ и $P(2014+x) + P(2022-x) = 4040$ для всех x .

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC .

Вариант № 3

1. При каких a

- уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;
- уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x) = \frac{(5-3a)x-2}{5x+a-1} ?$$

2. Каждое из четырех чисел $-1; -1; -\frac{1}{4}; 0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x + \cos y$, $\sin x - \cos y$, $\sin x \cdot \cos y$, $\sin x : \cos y$ над числами $\sin x$, $\cos y$ для некоторых x и y . Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы
$$\begin{cases} x-2y = a-1 \\ 2z-y = a+2 \\ x+4z = a+3 \end{cases}$$
 удо-

влетворяет уравнению $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 20$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2024, для которого $P(2006) = 2020$, $P(2007) = 2018$ и $P(2014+x) = P(2000-x)$ для всех x .

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37,5^0, 60^0, 82,5^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC .

Вариант № 4

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x) = \frac{(a+3)x - 13}{x + 2a + 3} ?$$

2. Каждое из четырех чисел $-3; -1; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}$ является результатом одной из четырех арифметических операций $tgx + ctgy$, $tgx - ctgy$, $tgx \cdot ctgy$, $tgx : ctgy$ над числами tgx , $ctgy$ для некоторых x и y . Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы
$$\begin{cases} 3x - y = a - 2 \\ y + 2z = -a - 1 \\ 3x - 2z = 2a + 3 \end{cases}$$
 удо-

влетворяет уравнению $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2021, для которого $P(2019) = 2022$ и $P(2014 + x) + P(2024 - x) = 4044$ для всех x .

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37,5^\circ, 67,5^\circ, 75^\circ$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC .

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
10 класс, СНГ, февраль 2020**

Вариант № 1

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 200 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 20, Вова – 30(м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin(\sin 2x + \cos 2x - 1) \geq 2 \sin x(\sin x - \cos x).$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 7 возросла в три раза. Найти p и q , если известно, что $\text{НОД}(p, q) = 2$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \frac{1}{n + \frac{2019}{n + \frac{1}{n}}}$ принимает

наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O . Угол DOC равен 58° . Найти углы треугольника ABC , если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Вариант № 2

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 100 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 30 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 10, Вова – 20 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3}) \leq 2 \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x).$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 5 возросла в два раза. Найти p и q , если известно, что $\text{НОД}(p, q) = 3$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \frac{1}{n + \frac{400}{n + \frac{1}{n}}}$ принимает

наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O . Угол DOC равен 72° . Найти углы треугольника ABC , если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Вариант № 3

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 340 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 15, Вова – 25 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin(\sin 4x + \cos 4x + 1) + 2 \cos 2x(\sin 2x + \cos 2x) > 0.$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 4 возросла в четыре раза. Найти p и q , если известно, что $\text{НОД}(p, q) = 5$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \frac{1}{n + \frac{900}{n + \frac{1}{n}}}$ принимает

наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O . Угол DOC равен 64° . Найти углы треугольника ABC , если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Вариант № 4

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 160 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 32 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 16, Вова – 24 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin(\sqrt{3} \sin 4x - \cos 4x + 1) + 2 \sin 2x (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x) < 0.$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю b уменьшилась в два раза. Найти p и q , если известно, что $\text{НОД}(p, q) = 4$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \frac{1}{n + \frac{1600}{n + \frac{1}{n}}}$ принимает

наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O . Угол DOC равен 42° . Найти углы треугольника ABC , если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.