Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 160, 60 и 20км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 400м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

2. Найти девять натуральных чисел кратных шести, среди которых ни одно число не кратно другому, но куб каждого числа кратен квадрату любого из них.

3. Ненулевые целые числа a,b,c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a,b,c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a,b,c.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму $120.$ Известно, что k-ое по порядку написанное число $a_k,$ кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках

N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Найти угол при вершине A треугольника.

Ответы и решения

1. До выезда красного автомобиля на границу грунтового участка оба автомобиля движутся по шоссе с одинаковой скоростью, следовательно, расстояние между ними не меняется, оставаясь равным 400 метрам. Таким образом, можно начать рассматривать движение машин в момент пересечения красным автомобилем границы грунтового участка со стороны шоссе. При этом белый автомобиль находится на шоссе в 400 метрах до границы с грунтовым участком. Он достигнет этой границы через $\frac{0,400}{160}$ часа, за это время красный автомобиль проедет $s_1 = \frac{0,400}{160} \cdot 60 = 0,150$ км. Здесь мы учитываем, что по условию задачи оба автомобиля могли находиться на грунтовой дороге одновременно. Пока оба автомобиля находятся на грунте расстояние между ними остается равным $s_1 = 150$ м. Аналогичными рассуждениями получаем, что расстояние между автомобилями на грязевом участке пути постоянно и равно $s_2 = \frac{0,150}{60} \cdot 20 = 0,050$ км $= 50$ м.

Ответ: $s_1 = 150$ м, $s_2 = 50$ м.

2. При решении задачи возможны следующие рассуждения. Все искомые числа делятся на 6, значит, в их разложении на простые множители должны присутствовать числа 2 и 3. Пусть тогда $a_1 = 2^m \cdot 3^n$. Если в последующих числах $a_2, a_3, ..., a_9$ показатели m монотонно возрастают, а показатели n монотонно убывают, например, $a_2 = 2^{m+1} \cdot 3^{n-1}$, $a_3 = 2^{m+2} \cdot 3^{n-2}$, ... , $a_9 = 2^{m+8} \cdot 3^{n-8}$, то ни одно из чисел не может быть кратно другому, таким образом выполняется второе условие задачи. Далее, у кубов этих чисел наименьший показатель двойки есть $3m$ и он должен быть не меньше, чем наибольший показатель двойки у квадратов чисел, то есть $2(m+8)$. Из $3m \geq 2(m+8)$ получаем, что $m \geq 16$. Аналогично, для показателей тройки имеем условие $3(n-8) \geq 2n$. Откуда $n \geq 24$. Таким образом, при $m \geq 16$ и $n \geq 24$ куб каждого из чисел $a_1, \ldots, a_9$ будет делится на квадрат любого другого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 2^{16} \cdot 3^{24}$, $a_2 = 2^{17} \cdot 3^{23}$, $a_3 = 2^{18} \cdot 3^{22}, \ldots$, $a_9 = 2^{24} \cdot 3^{16}$.

Замечание. Очевидно, верный ответ определен неоднозначно. Существует много других правильных стратегий решения данной задачи. Общим во всех стратегиях является то, что все числа набора содержат одинаковые простые множители, среди которых обязательно должны быть 2 и 3. В качестве иного возможного ответа можно привести набор чисел вида $a_k = a^2 \cdot p_k$, $k = 1, \ldots, 9$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots, p_9 = 23$ – первые девять простых чисел, и $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_9$.

3. Поскольку a, b, c являются последовательными членами возрастающей целочисленной арифметической прогрессии, то $a = b-d$, $c = b+d$; $b, d \in Z$, $d > 0$. Кроме того, $b \neq 0$, $b \neq \pm d$, так как по условию рассматриваются ненулевые члены прогрессии.

Имеется три возможных значения дискриминанта для квадратных уравнений с коэффициентами a, b, c, взятыми в произвольном порядке: $D_1 = b^2 - 4(b-d)(b+d) = 4d^2 - 3b^2$,

$$D_2 = (b-d)^2 - 4b(b+d) = d^2 - 6bd - 3b^2,$$

$$D_3 = (b+d)^2 - 4b(b-d) = d^2 + 6bd - 3b^2.$$

Для существования двух различных корней у всех квадратных уравнений, должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} 4d^2 - 3b^2 > 0, \\ d^2 - 6bd - 3b^2 > 0, \\ d^2 + 6bd - 3b^2 > 0. \end{cases}$$

Решим эту систему неравенств, учитывая, что $d > 0$. Имеем

$$\begin{cases} -\dfrac{2d}{\sqrt{3}} < b < \dfrac{2d}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1 < b < \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1 < b < \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow |b| < \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) d \Leftrightarrow d > \frac{|b|\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Наименьшее значение $|b| = 1$. Тогда $d > \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \approx 6,5$ и наименьшее целое $d_{\min} = 7$. Для $b = -1$ получаем значения $a = -8, c = 6$. Для $b = 1$ будут значения $a = -6, c = 8$.

Ответ: $d_{\min} = 7;\ a_1 = -8,\ b_1 = -1,\ c_1 = 6;\ \ a_2 = -6,\ b_2 = 1,\ c_2 = 8.$

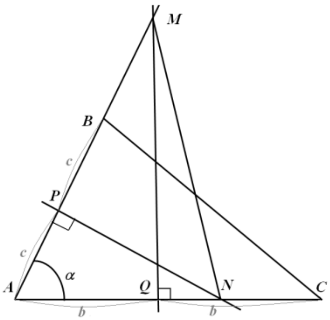
4. По условию, $a_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots a_n}{k+1} = \dfrac{120 - a_k}{k+1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда $(k+2)a_k = 120$ и $a_k = \dfrac{120}{k+2}$. С учетом того, что a_k – целые числа, максимальное значение n определяется условием делимости числителя на $3, 4, 5, \ldots, n, (n+1)$. Поскольку 120 делится на $3, 4, 5, 6$, но не делится на 7, получаем $n + 1 = 6,$ следовательно $n_{\max} = 5.$ Вычисляем $a_1 = \dfrac{120}{3} = 40,$ $a_2 = \dfrac{120}{4} = 30,\ a_3 = \dfrac{120}{5} = 24,\ a_4 = \dfrac{120}{6} = 20.$ Теперь находим оставшееся число $a_5 = 120 - (40 + 30 + 24 + 20) = 6.$

Ответ: $n_{\max} = 5,\ a_1 = 40,\ a_2 = 30,\ a_3 = 24,\ a_4 = 20,\ a_5 = 6.$

5. Введем обозначения: $AB = 2c,\ AC = 2b,\ \measuredangle BAC = \alpha.$ Основания серединных перпендикуляров обозначим точками P и Q. Тогда в прямоугольном $\triangle AMQ$ гипотенуза $AM = \dfrac{b}{\cos\alpha}$. А в прямоугольном $\triangle ANP$ гипотенуза $AN = \dfrac{c}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольников AMN и ABC соответственно, имеем

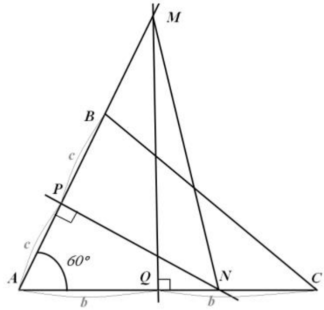
$$NM^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha = 4\left(c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha\right).$$

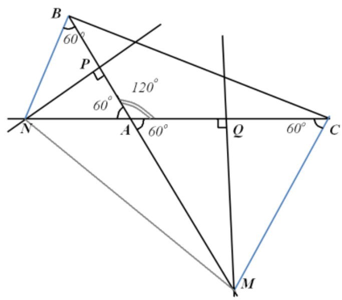


По условию, $MN = BC$, следовательно $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = 60^0$ или $\alpha = 120^0$. Покажем, что оба случая реализуются, то есть что если $\alpha = 60^0$ или $\alpha = 120^0$, то $MN = BC$.

Случай 1. Если $\alpha = 60^0$, то $\measuredangle PNA = 30^0$, тогда $AN = 2c = AB$, и $\measuredangle AMQ = 30^0$, тогда $AM = 2b = AC$. Отсюда $\triangle ANM = \triangle ABC$ по двум сторонам и углу α между ними. Следовательно, $MN = BC$.



Случай 2. Если $\alpha = 120^0$, то $\measuredangle BAN = 60^0$. Далее, $AN = NB$, то есть $\triangle NAB -$ равнобедренный, поэтому $\measuredangle ABN = 60^0$, таким образом, $\triangle NAB -$ равносторонний. Следовательно, $AN = AB$. Аналогично $\triangle MAC -$ равносторонний. Следовательно, $AM = AC$. Отсюда



$\triangle ANM = \triangle ABC$ по двум сторонам и углу α между ними. Следовательно, $MN = BC$.

Ответ: 60^0 или 120^0.

Вариант № 2

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 120, 40 и 10км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 600м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 200$ м, $s_2 = 50$ м.

2. Найти 10 натуральных чисел кратных 15, среди которых ни одно число не кратно другому, но четвертая степень каждого числа кратна кубу любого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 3^{27} \cdot 5^{36}$, $a_2 = 3^{28} \cdot 5^{35}$, $a_3 = 3^{29} \cdot 5^{34}$, ... , $a_{10} = 3^{36} \cdot 5^{27}$.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $2a, 2b, c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

Ответ: $d_{\max} = -5;$ $a = 4,$ $b = -1,$ $c = -6.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму 2520. Известно, что k -ое по порядку написанное число a_k , кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

Ответ: $n_{\max} = 9;\ a_1 = 840,\ a_2 = 630,\ a_3 = 504,\ a_4 = 420,\ a_5 = 360,$ $a_6 = 315,\ a_7 = 280,\ a_8 = 252, a_9 = -1081.$

5. В треугольнике ABC с углом 120^0 при вершине A проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина стороны BC равна 8. Найти длину отрезка NM.

Ответ: 8.

Вариант № 3

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 100, 70 и 15км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 500м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 350$ м, $s_2 = 75$ м.

2. Найти 13 натуральных чисел кратных 21, среди которых ни одно число не кратно другому, но пятая степень каждого числа кратна четвертой степени любого из них.

Ответ: например, $a_1 = 3^{48} \cdot 7^{60}$, $a_2 = 3^{49} \cdot 7^{59}$, $a_3 = 3^{50} \cdot 7^{58}$, ... , $a_{13} = 3^{60} \cdot 7^{48}.$

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, b, 2c,$ взятые в произвольном порядке, имеют два различных корня. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа $a, b, c.$

Ответ: $d_{\min} = 4;\ a = -5,\ b = -1,\ c = 3.$

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ и имеющих сумму $420.$ Известно, что k -ое по порядку написанное число $a_k,$ кроме последнего, полученного при $k = n,$ в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного $n.$

Ответ: $n_{\max} = 6;\ a_1 = 140,\ a_2 = 105,\ a_3 = 84,\ a_4 = 70,\ a_5 = 60,$ $a_6 = -39.$

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и $AC,$ пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника и равна $2\sqrt{3}.$ Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC.$

Ответ: $R = 2.$

Вариант № 4

1. Трасса для автомобильных гонок содержит три участка: шоссейный, грунтовый и грязевой. Скорость движения двух автомобилей, участвующих в гонке, на каждом участке трассы одинаковая, равная 150, 60 и 18км/час соответственно. Отчет времени пошел в тот момент, когда красный автомобиль находился на шоссе в 300м впереди белого автомобиля, а он в этот момент пересекал линию старта в начале шоссейного участка. Найти расстояние между автомобилями в моменты времени, когда оба они находились на грунтовом участке трассы. Найти расстояние между автомобилями в момент, когда они оба находились на грязевом участке трассы.

Ответ: $s_1 = 120$ м, $s_2 = 36$ м.

2. Найти 15 натуральных чисел кратных 35, среди которых ни одно число не кратно другому, но шестая степень каждого числа кратна пятой степени любого из них.

Ответ: Например, $a_1 = 5^{70} \cdot 7^{84}$, $a_2 = 5^{71} \cdot 7^{83}$, $a_3 = 5^{72} \cdot 7^{82}$, ... , $a_{15} = 5^{84} \cdot 7^{70}$.

3. Ненулевые целые числа a, b, c являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии. Все шесть квадратных уравнений, коэффициентами которых являются числа $a, 2b, 4c$, взятые в произвольном порядке, имеют два корня. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение разности прогрессии и соответствующие ей числа a, b, c.

Ответ: $d_{\max} = -3$; $a = 4$, $b = 1$, $c = -2$.

4. В тетради написаны n целых чисел, упорядоченных по убыванию $a_1 > a_2 > ... > a_n$ и имеющих сумму 840. Известно, что k-ое по порядку написанное число a_k, кроме последнего, полученного при $k = n$, в $(k+1)$ раз меньше суммы всех остальных написанных чисел. Найти максимальное число n возможное при этих условиях. Найти эти числа для максимально возможного n.

Ответ: $n_{\max} = 7$; $a_1 = 280$, $a_2 = 210$, $a_3 = 168$, $a_4 = 140$, $a_5 = 120$, $a_6 = 105$, $a_7 = -183$.

5. В треугольнике ABC проведены срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC, пересекающие прямые AC и AB в точках N и M соответственно. Длина отрезка NM равна длине стороны BC треугольника. Угол при вершине C треугольника равен 40^0. Найти угол при вершине B треугольника.

Ответ: 80^0 или 20^0.

Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
9 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. В 9а классе есть ученики, увлеченные кино, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Шестая часть любителей просмотра кинофильмов читает книги, а 20% книголюбов с удовольствием смотрят кино. В классе есть только три ученика, которые не смотрят фильмов и не читают книг. Сколько учеников в 9а классе, если их не менее 25, но не более 35?

2. На окружности отмечены 18 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно единице. Найти их сумму.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 2 : 1$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 8.

4. Сумма $b_5 + b_6 + ... + b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 18, а их произведение $b_5 \cdot b_6 \cdot ... \cdot b_{2019}$ равно 3^{2015}. Найти сумму обратных величин $\frac{1}{b_5} + \frac{1}{b_6} + ... + \frac{1}{b_{2019}}$.

5. Известно, что в трапецию с углом 30^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Ответы и решения

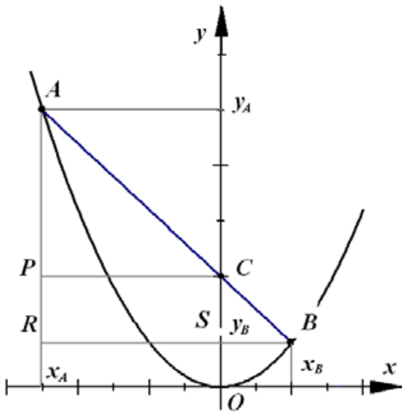
1. Пусть x – число кинолюбителей в классе, y – число книголюбов, а z – число кинолюбителей, которые любят читать книги, $x, y, z \in Z$. По условию, $z = \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{5}$, следовательно $\begin{cases} x = 6z \\ y = 5z \end{cases}$. Отсюда получаем общее число учеников в классе $n = x + y - z + 3 = 10z + 3$. Поскольку $n \in [25; 35]$, имеем двойное неравенство $25 \le 10z + 3 \le 35$, откуда $z = 3 \Rightarrow n = 10 \cdot 3 + 3 = 33$.

Ответ: 33 ученика.

2. Все написанные числа неотрицательные, поскольку они равны модулю разности соседей. Рассмотрим число с наибольшим значением. Без ограничения общности можно считать, что $x_2 = 1$. Его соседи x_1 и x_3 – два неотрицательных числа, не превосходящие 1, такие что $|x_1 - x_3| = 1$. Этим условиям удовлетворяют только числа 0 и 1 (в любом порядке). Таким образом возможны два расположения тройки чисел: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ и $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$. Каждая из троек однозначно определяет все остальные числа на окружности. Это будут последовательности $0,1,1,0,1,1,\ldots,0,1,1$ и $1,1,0,1,1,0,\ldots,1,1,0$ соответственно. В любом случае, на окружности нарисованы 12 единиц и 6 нулей. Их сумма равна 12.

Ответ: 12.

3. Пусть $(x_A; y_A), (x_B; y_B)$ – соответственно координаты точек A и B на параболе. Тогда $y_A = x_A^2$, $y_B = x_B^2$. Рассмотрим ради определенности случай $x_A < 0,\ x_B > 0$. Согласно условию, длины отрезков AC и CB равны $2t$ и t соответственно, значит, точка A лежит выше точки B. Поскольку $\triangle APC \sim \triangle ARB$, имеет место пропорция $\dfrac{y_A - y_B}{y_A - 8} = \dfrac{2t + t}{2t} = \dfrac{3}{2}$, откуда $y_A = 24 - 2y_B$.



Далее, $\triangle CSB \sim \triangle ARB$, поэтому $\dfrac{x_B - x_A}{x_B} = \dfrac{2t+t}{t} = \dfrac{3}{2}$, тогда

$$x_A = -2x_B \Rightarrow x_A^2 = 4x_B^2 \Rightarrow y_A = 4y_B.$$

Наконец, решая систему $\begin{cases} y_A = 24 - 2y_B \\ y_A = 4y_B \end{cases}$, получим что

$$y_B = 4 \Rightarrow x_B = 2 \Rightarrow x_A = -4.$$

Из соображений симметрии, при $x_A > 0,\ x_B < 0,$ имеется решение $x_B = -2,\ x_A = 4.$

Ответ: $\left(x_A = -4,\ x_B = 2\right),\ \left(x_A = 4,\ x_B = -2\right).$

4. Поскольку все члены прогрессии положительны, ее знаменатель $q > 0$. Легко проверить, что $q \neq 1$. Иначе все рассматриваемые члены прогрессии были бы меньше единицы, и их произведение не могло бы равняться 18. Теперь рассмотрим сумму

$$b_5 + b_6 + \ldots + b_{2019} = b_5\left(1 + q + \ldots + q^{2014}\right) = b_5 \cdot \frac{1 - q^{2015}}{1 - q} = 18,$$

и произведение

$$b_5 \cdot b_6 \cdot \ldots \cdot b_{2019} = b_5^{2015} \cdot q^{1+2+\ldots+2014} = b_5^{2015} \cdot q^{\frac{(1+2014)}{2}\cdot 2014} =$$

$$b_5^{2015} \cdot q^{2015\cdot 1007} = \left(b_5 \cdot q^{1007}\right)^{2015} = 3^{2015} \Rightarrow b_5 \cdot q^{1007} = 3.$$

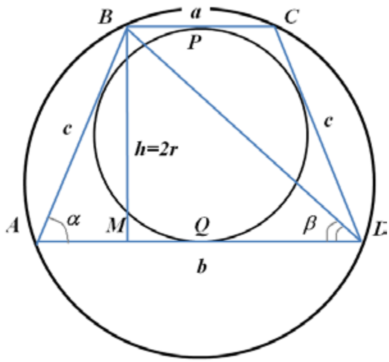
Обратные величины также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{q}$ и первым членом $\dfrac{1}{b_5}$, так что получим:

$$\frac{1}{b_5}+\frac{1}{b_6}+\ldots\frac{1}{b_{2019}}=\frac{1}{b_5}\left(1+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q^{2014}}\right)=\frac{1}{b_5}\cdot\frac{1-\frac{1}{q^{2015}}}{1-\frac{1}{q}}=$$

$$\frac{1}{b_5}\cdot\frac{q^{2015}-1}{(q-1)q^{2014}}=b_5\cdot\frac{q^{2015}-1}{(q-1)}\cdot\frac{1}{\left(b_5\cdot q^{1007}\right)^2}=\frac{18}{3^2}=2.$$

Ответ: 2.

5. Введем обозначения: $ABCD-$данная трапеция с основаниями AD и BC, $r-$радиус вписанной окружности, $R-$ радиус описанной окружности, $BM=h=2r-$ высота трапеции. Поскольку трапеция вписана в окружность, она равнобедренная. Пусть $BC=a$, $AD=b$, $AB=CD=c$. Угол при основании трапеции $\alpha=30^0$, угол $\measuredangle MDB=\beta$, $P,Q-$середины оснований.



По свойству описанных около окружности четырехугольников, имеем $2c=a+b$. Тогда $\frac{2r}{c}=\frac{4r}{a+b}=\sin\alpha=\frac{1}{2}$, следовательно $a+b=8r$. Площадь трапеции $S=\frac{a+b}{2}h=(a+b)r=8r^2=\frac{c^2}{2}$. Площадь вписанной окружности $S_1=\pi r^2$, поэтому $\frac{S}{S_1}=\frac{8r^2}{\pi r^2}=\frac{8}{\pi}$.

Далее, $MD = MQ + QD = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} = c.$ Из $\triangle BMD$ получаем: $\operatorname{tg}\beta = \frac{2r}{c} = \sin\alpha,$ откуда $\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \sin^2\alpha = \frac{5}{4},$ следовательно $\frac{1}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$ Таким образом, $BD = \frac{c}{\cos\beta} = \frac{c\sqrt{5}}{2}.$

По теореме синусов, $2R = \frac{BD}{\sin\alpha} = c\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{c\sqrt{5}}{2}.$

Отсюда площадь описанной окружности $S_2 = \pi R^2 = \frac{5\pi c^2}{4}.$

Тогда $\frac{S}{S_2} = \frac{c^2}{2}\frac{4}{5\pi c^2} = \frac{2}{5\pi}.$

Ответ: $\frac{S}{S_1} = \frac{8}{\pi}, \quad \frac{S}{S_2} = \frac{2}{5\pi}.$

Вариант № 2

1. В $9^{б}$ классе 25% любителей рока с удовольствием слушают классическую музыку, а пятая часть любителей классики слушает рок. Только два ученика в классе не слушают музыку. Сколько учеников в $9^{б}$ классе, если известно, что их не менее 25, но не более 30?

Ответ: 26 учеников.

2. На окружности отмечены 15 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно двум. Найти сумму квадратов написанных чисел.

Ответ: 40.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 3$ Найти абсциссы точек A и $B,$ если ордината точки C равна 15.

Ответ: $(x_A = -5,\ x_B = 3),\ (x_A = 5,\ x_B = -3).$

4. Сумма $b_7 + b_6 + ... + b_{2019}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\},\ b_n > 0$ равна 27, а сумма их обратных величин $\frac{1}{b_7} + \frac{1}{b_6} + ... + \frac{1}{b_{2019}}$ равна 3. Найти произведение $b_7 \cdot b_6 \cdot ... \cdot b_{2019}$.

Ответ: $b_7 \cdot b_6 \cdot ... \cdot b_{2019} = 3^{2013}.$

5. Известно, что в трапецию с углом 60^0 при основании можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.

Ответ: $\frac{P}{L_1} = \frac{8\sqrt{3}}{3\pi},\ \frac{P}{L_2} = \frac{4\sqrt{21}}{7\pi}.$

Вариант № 3

1. В $9^{в}$ классе пятая часть любителей сладкого любят поесть соленого, а треть любителей соленого не отказывается от сладкого. Только четыре ученика не едят ни сладкого, ни соленого. Сколько учеников в $9^{в}$ классе, если их не менее 30 и не более 36?

Ответ: 32 ученика.

2. На окружности отмечены 12 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Сумма всех чисел равна 24. Найти наибольшее из них.

Ответ: 3.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 3 : 2$. Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 12.

Ответ: $\left(x_A = -3\sqrt{2},\ x_B = 2\sqrt{2}\right)$, $\left(x_A = 3\sqrt{2},\ x_B = -2\sqrt{2}\right)$.

4. Сумма $b_6 + b_7 + \ldots + b_{2018}$ членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 6. Сумма тех же членов взятых с чередованием знаков $b_6 - b_7 + b_8 - \ldots - b_{2017} + b_{2018}$ равна 3. Найти сумму квадратов тех же членов $b_6^2 + b_7^2 + \ldots + b_{2018}^2$.

Ответ: $b_6^2 + b_7^2 + \ldots + b_{2018}^2 = 18$.

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 45^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение площади трапеции к площади, вписанного в нее круга. Найти отношение площади трапеции к площади, описанного около нее круга.

Ответ: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{4}{\pi}$, $\quad \dfrac{S}{S_2} = \dfrac{2}{\pi}$.

Вариант № 4

1. В $9^{г}$ классе 25% учеников, играющих в футбол, занимаются шахматами, а каждый седьмой любитель шахмат играет в футбол. Только один ученик не играет в футбол и не играет в шахматы. Сколько учеников в $9^{г}$ классе, если их не менее 18, но не более 25?

Ответ: 21 ученик.

2. На окружности отмечены 9 точек и рядом с каждой из них написано число. Каждое число равно модулю разности двух соседних с ним чисел. Наибольшее из чисел равно четырем. Найти сумму кубов этих чисел.

Ответ: 384.

3. Хорда AB параболы $y = x^2$ пересекает ось ординат в точке C и делится ею в отношении $AC : CB = 5 : 2$ Найти абсциссы точек A и B, если ордината точки C равна 20.

Ответ: $\left(x_A = -5\sqrt{2},\ x_B = 2\sqrt{2}\right),\ \left(x_A = 5\sqrt{2},\ x_B = -2\sqrt{2}\right).$

4. Сумма $b_8^2 + b_9^2 + \ldots + b_{2020}^2$ квадратов членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $b_n > 0$ равна 4. Сумма их обратных величин $\frac{1}{b_8^2} + \frac{1}{b_9^2} + \ldots + \frac{1}{b_{2020}^2}$ равна 1. Найти произведение $b_8^2 \cdot b_9^2 \cdot \ldots \cdot b_{2020}^2$.

Ответ: $b_8^2 \cdot b_9^2 \cdot \ldots \cdot b_{2020}^2 = 2^{2013}.$

5. Известно, что в трапецию $ABCD$, у которой диагональ BD образует с основанием угол 30^0, можно вписать окружность и около нее можно описать окружность. Найти отношение периметра трапеции к длине, вписанной в нее окружности. Найти отношение периметра трапеции к длине, описанной около нее окружности.

Ответ: $\frac{P}{L_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi},\quad \frac{P}{L_2} = \frac{2}{\pi}.$