Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. Паша и Даша отправились из дома на велосипедную прогулку. Паша передвигается на велосипеде со скоростью 12 км/ч, Даша – 8 км/ч. Проехав некоторый путь, Паша остановился и пошел пешком, ожидая, что Даша его догонит. Даша догнала Пашу, преодолев путь в два раза больший, чем путь, пройденный Пашей до остановки.
С какой скоростью Паша идет пешком?

2. Представить число 2022 в виде суммы кубов четырех целых чисел.

3. Имеются шесть чисел $ab, a(a+4),$ $a(b+4), b(a+4),$ $b(b+4), (a+4)(b+4)$ для любой пары натуральных a и $b, a \neq b$. Среди них, при некоторых a и b, можно обнаружить квадраты целых чисел. При каких a и b количество квадратов будет максимально возможное?

4. Сколько существует различных наборов из пяти чисел, в которых каждое число равно произведению двух других чисел из этого набора? Наборы, отличающиеся только порядком следования чисел, считать одинаковыми.

5. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. Точка N лежит на продолжении стороны BA за вершину A так, что $AN : AB = 1 : 2$. Точка P лежит на продолжении стороны BC за вершину C так, что $CP : BC = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответы и решения

1. Пусть s – путь, пройденный Пашей до остановки. v – скорость движения пешком. Тогда

$$\frac{s}{12}+\frac{s}{v}=\frac{2s}{8}.$$

Отсюда находим $v = 6$.

Ответ: 6 км/ч.

2. Заметим, что $(n+1)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 = 6n$. Таким образом, все целые числа кратные шести могут быть представлены в виде суммы кубов четырех целых чисел. Число 2022 кратно 6: $2022 = 6n = 6 \cdot 337$. Таким образом, $n = 337$ и, следовательно,

$$2022 = 338^3 + 336^3 + (-337)^3 + (-337)^3.$$

Ответ: $2022 = 338^3 + 336^3 + (-337)^3 + (-337)^3$.

3. Покажем, что числа $a(a+4)$ и $b(b+4)$ не могут быть квадратами. Действительно, пусть, например,

$$a(a+4) = c^2, c \in Z, c > 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(a+2)^2 - c^2 = 4 \quad \text{или} \quad (a+c+2)(a-c+2) = 4.$$

Рассмотрим левую часть этого уравнения. Заметим, что наименьшее значение первого сомножителя равно 4. Оно достигается при $a = 1,\ \ c = 1$. В этом случае второй сомножитель равен 2, а произведение сомножителей равно 8. Таким образом, мы доказали, что левая часть уравнения больше или равна 8. Это означает, что уравнение решений не имеет.

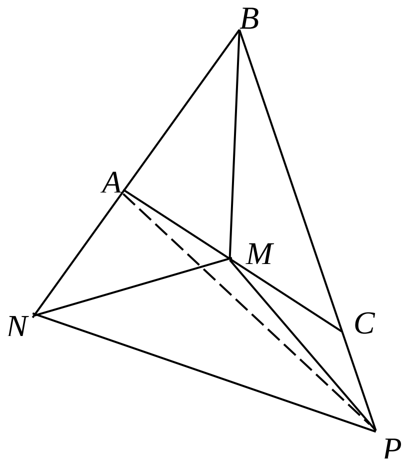
Осталось четыре числа $ab,\ \ a(b+4),\ \ b(a+4),\ \ (a+4)(b+4)$ Среди двух чисел $ab, a(b+4)$ может быть не более одного квадрата. Действительно, в противном их произведение $a^2b(b+4)$ также квадрат, а значит $b(b+4)$ является квадратом, что невозможно. По тем же причинам, среди оставшейся пары чисел $b(a+4),(a+4)(b+4)$ может быть также только один квадрат. Таким образом, шесть попарных произведений содержат не более двух квадратов целых чисел. Например, для $a = 32$ и $b = 4$ числа $b(a+4) = 4 \cdot 36 = 144$ и $a(b+4) = 32 \cdot 8 = 256$ являются квадратами.

Ответ: два квадрата, например, при $a = 32, b = 4$.

4. Рассмотрим наборы из пяти чисел $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5)$, в которых $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = a$, $a \in R$. Покажем, что такие наборы удовлетворяют условиям задачи. Действительно, $a_1 = a_2 \cdot a_3 = 1$, $a_2 = a_1 \cdot a_3 = 1$, $a_3 = a_1 \cdot a_2 = 1$, $a_4 = a_1 \cdot a_5 = a$, $a_5 = a_1 \cdot a_4 = a$.

Ответ: бесконечное число наборов, например, $(1;1;1;a;a)$, $a \in R$.

5. При решении этой задачи будем пользоваться тем фактом, что отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению длин оснований, к которым эти высоты проведены.



Обозначим площадь треугольника ABC через $2S$. Рассмотрим треугольники ABM и MBC. Так как $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{MC}{AC} = \frac{1}{2}$, то $S_{ABM} = S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = S$. Теперь рассмотрим треугольники AMN и ABM. Так как $\frac{S_{AMN}}{S_{ABM}} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$, то $S_{AMN} = \frac{1}{2} S_{ABM} = \frac{S}{2}$. Рассматривая треугольники MCP и MBC, получаем $S_{MCP}=\frac{1}{3}S_{BMC}=\frac{S}{3}$. Выразим площадь треугольника NBP через площадь треугольника ABC. Так как $\frac{CP}{BC}=\frac{1}{3}$, то $S_{APC}=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{2S}{3}$. Тогда

$$S_{ABP}=S_{ABC}+S_{APC}=2S+\frac{2S}{3}=\frac{8S}{3}.$$

Так как $\frac{AN}{AB}=\frac{1}{2}$, то $S_{NAP}=\frac{1}{2}S_{ABP}=\frac{4S}{3}$. Складывая площади треугольников ABP и NAP, находим

$$S_{NBP}=S_{ABP}+S_{NAP}==\frac{8S}{3}+\frac{4S}{3}=4S.$$

Тогда

$$S_{MNP}=S_{NBP}-S_{ABC}-S_{AMN}-S_{MCP}=4S-2S-\frac{S}{2}-\frac{S}{3}=\frac{7S}{6}.$$

Теперь можно найти отношение площадей треугольников MNP и ABC

$$S_{MNP}:S_{ABC}=\frac{7S}{6}:2S=7:12.$$

Ответ: $7:12$.

Вариант № 2

1. Паша и Даша совершали велосипедную прогулку по шоссе от дома до дачи и прибыли на дачу одновременно. Проехав две трети пути, Паша слез с велосипеда и пошел пешком. Даше также пришлось половину времени идти пешком. Скорость движения пешком Паши и Даши одинаковая и равна 5 км/ч. Найти скорость передвижения Даши на велосипеде, если Паша едет на велосипеде со скоростью 20 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

2. Представить число 1998 в виде суммы кубов четырех целых чисел.

Ответ: $1998 = 334^3 + 332^3 + (-333)^3 + (-333)^3$.

3. Имеются шесть чисел $ab, a(a+6), \quad a(b+6), b(a+6), b(b+6), (a+6)(b+6)$ для любой пары натуральных a и $b, a \neq b$. Среди них, при некоторых a и b, можно обнаружить квадраты целых чисел. При каких a и b количество квадратов будет максимально возможное?

Ответ: три квадрата при $a = 2, b = 2k^2, k \in Z, k > 1$.

4. Сколько существует различных наборов из шести чисел, в которых каждое число равно произведению двух других чисел из этого набора? Наборы, отличающиеся только порядком следования чисел, считать одинаковыми.

Ответ: бесконечное число наборов, например, $(1;1;1;a;a;a)$, $a \in R$.

5. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. Точка N лежит на продолжении стороны BA за вершину A так, что $AN : AB = 2:3$. Точка P лежит на продолжении стороны BC за вершину C так, что $CP : BC = 1:2$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $11:12$.

Вариант № 3

1. Паша и Даша совершали велосипедную прогулку по шоссе от дома до дачи и прибыли на дачу одновременно. Проехав половину пути, Паша слез с велосипеда и пошел пешком. Даше также пришлось треть времени идти пешком. Скорость движения пешком Паши и Даши одинаковая и равна 4 км/ч. Найти скорость передвижения Даши на велосипеде, если Паша едет на велосипеде со скоростью 20 км/ч.

Ответ: 8 км/ч.

2. Представить число 1812 в виде суммы кубов четырех целых чисел.

Ответ: $1812 = 303^3 + 301^3 + (-302)^3 + (-302)^3$.

3. Имеются шесть чисел $a(b+8), b(a+8)$, $ab, a(a+8)$, $b(b+8), (a+8)(b+8)$ для любой пары натуральных a и $b, a \neq b$. Среди них, при некоторых a и b, можно обнаружить квадраты целых чисел. При каких a и b количество квадратов будет максимально возможное?

Ответ: три квадрата при $a = 1, b = k^2, k \neq 1, k \in Z$.

4. Сколько существует различных наборов из семи чисел, в которых каждое число равно произведению двух других чисел из этого набора? Наборы, отличающиеся только порядком следования чисел, считать одинаковыми.

Ответ бесконечное число наборов, например, $(1;1;1;a;a;a;a)$, $a \in R$.

5. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. Точка N лежит на продолжении стороны BA за вершину A так, что $AN : AB = 3:4$. Точка P лежит на продолжении стороны BC за вершину C так, что $CP : BC = 1:3$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $11:12$.

Вариант № 4

1. Паша и Даша совершали велосипедную прогулку по шоссе от дома до дачи и прибыли на дачу одновременно. Проехав три четверти пути, Паша слез с велосипеда и пошел пешком. Даше также пришлось четверть времени идти пешком. Скорость движения пешком Паши и Даши одинаковая и равна 3 км/ч. Найти скорость передвижения Даши на велосипеде, если Паша едет на велосипеде со скоростью 9 км/ч.

Ответ: 7 км/ч.

2. Представить число 1944 в виде суммы кубов четырех целых чисел.

Ответ: $1944 = 325^3 + 323^3 + (-324)^3 + (-324)^3$.

3. Имеются шесть чисел $ab, a(a+10),\quad a(b+10), b(a+10),$ $b(b+10), (a+10)(b+10)$ для любой пары натуральных a и b, $a \neq b$. Среди них, при некоторых a и b, можно обнаружить квадраты целых чисел. При каких a и b количество квадратов будет максимально возможное?

Ответ: три квадрата при $a = 1, b = k^2, k \neq 1, k \in Z.$

4. Сколько существует различных наборов из восьми чисел, в которых каждое число равно произведению двух других чисел из этого набора? Наборы, отличающиеся только порядком следования чисел, считать одинаковыми.

Ответ: бесконечное число наборов, например,

$$\left(1;1;1;a;a;a;a;a\right),\quad a \in R.$$

5. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. Точка N лежит на продолжении стороны BA за вершину A так, что $AN : AB = 2:5$. Точка P лежит на продолжении стороны BC за вершину C так, что $CP : BC = 1:2$. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $13:20$.