Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
7 класс

Вариант № 1

1. При покупке товара на сумму не менее 2500р магазин предоставляет скидку на последующие покупки в размере 25%. Имея в кармане 3500р, Ваня хотел купить 3 рубашки и один галстук. В магазине рубашки продавались по цене 1200р, галстук – по цене 200р. Сообразив, что денег на покупку не хватает, Ваня все-таки смог купить задуманное. Как он это сделал?

2. Сколько существует различных пар целых чисел $(x; y)$, для которых $3x^2 + 5y^2 = 453$? Найти все такие пары.

3. За девять одинаковых шапочек заплатили 1100 и еще несколько рублей (меньше 100). За тринадцать таких же шапочек заплатили 1500 и еще несколько рублей (меньше 100). Сколько стоит одна шапочка?

4. Петя записал в первый столбик все четырехзначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 5, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

5. Восемь одинаковых кубиков, на гранях которых нарисованы цифры от 1 до 6 так, что сумма цифр на противоположных гранях кубика постоянная и равна 7 (игральные кости), собрали в куб. Какие значения может принимать сумма чисел, нарисованных на всех гранях этого куба.

Ответы и решения

1. При покупке 2 рубашек и 1 галстука заплатили 2600 рублей. Тогда вторая покупка будет со скидкой 25% . Цена 3-ей рубашки − 1200·0,75=900 рублей. Общая цена всей покупки 2600+900=3500 рублей.

Ответ: покупка возможна, общая цена − 3500 рублей.

2. Заметим, что коэффициенты уравнения 3 и 453 делятся на 3 нацело, тогда и слагаемое $5y^2$ делится на 3, тогда $y=3t$, $y^2=9t^2$, здесь $t\in Z$. Уравнение принимает вид: $3x^2+5\cdot 9t^2=453$, $x^2+5\cdot 3t^2=151$, $x^2=151-15t^2$, где $x\in Z$. Подставим возможные значения $t\geq 0$.

Значения t	$15t^2$	$x^2=151-15t^2$	Целое значение x.
$t=0$	0	$x^2=151$	нет
$t=1$	15	$x^2=151-15, x^2=136$	нет
$t=2$	60	$x^2=151-60, x^2=91$	нет
$t=3$	135	$x^2=151-135, x^2=16$	$x=\pm 4$
$t=4$	240	$x^2=151-240<0$	нет

Значит, $x=\pm 4, t=\pm 3, y=\pm 9$.

Ответ: 4 пары, $(\pm 4;\pm 9)$.

3. Пусть цена шапки $-x$ рублей, а $a,b-$деньги оплаченные сверх указанной суммы в первом и втором случаях. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x=1100+a, & 0<a<100, \\ 13x=1500+b, & 0<b<100. \end{cases}$$

С учётом условий на a, b получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} 1100<9x<1200, \\ 1500<13x<1600. \end{cases}$$

Решая систему, найдём ограничения на x: $\begin{cases} 122\frac{2}{9}<x<133\frac{1}{3}, \\ 115\frac{5}{13}<x<123\frac{1}{3}. \end{cases}$

Откуда, $x=123$ рубля.

Ответ: 123 рубля.

4. Петя записал в первый столбик все четырехзначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 5, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Сумма таких произведений получится в результате раскрытия скобок в выражении

$$(1+2+3+4+5)(0+1+2+3+4+5)(0+1+2+3+4+5)\cdot$$
$$\cdot(1+2+3+4+5)=15^4.$$

Сумма слагаемых в каждой скобке равна 15, а число скобок равно 4.

Ответ: $15^4=50625$.

5. Каждая вершина большого куба является вершиной одного из восьми маленьких кубиков. На трех гранях, примыкающих к этой вершине, нарисованы три цифры, сумма которых может принимать восемь значений $6,7,9,10,11,12,14,15$.

"Наименьший угол" задают цифры – 1,2,3. "Наибольший угол" – 4, 5, 6. Тогда, если весь кубик составить из "наименьших углов" получим: $6\cdot 8=48,$ из "наибольших" – $15\cdot 8=120$.

Докажем, что величина s – сумма цифр на гранях – принимает все значения на интервале $(48;120)$. Рассуждаем индуктивно. Установлено, что значение $s=48$ принимается. Значение $s=49$ принимается, если одну вершину с набором $(6,6,6,6,6,6,6,6)$ поменять на вершину с набором $(6,6,6,7,6,6,6,6)$. Пусть $a\in(48;120)$ и все значения $s=k, 48\le k\le a$ принимаются. Докажем, что значение $s=a+1$ также принимается. Утверждение очевидно, если в наборе $(p_1;p_2;p_3,p_4,p_5;p_6;p_7,p_8)$, реализующем значение $s=a$, присутствует одно из $p=6,9,10,11,14$. В этом случае, возможно изменение такого p на $p+1$ в одной из вершин большого куба, а значит увеличение s на единицу. В противном случае, присутствуют только $p = 7,12,15$, при этом не все $p = 15$. Если в наборе $(p_1; p_2; p_3, p_4, p_5; p_6; p_7, p_8)$, реализующем $s = a$ в этом случае, присутствуют две вершины с $p = 7$, то одну можно использовать для увеличения s на 2, а вторую – для уменьшения результата на 1, т.е. в результате s увеличится на 1. Аналогично с двумя вершинами с $p = 12$. Если в наборе, дающем $s = a$, присутствуют $p = 7$ и $p = 12$ по одному разу, то обязательно присутствует вершина с $p = 15$, которую можно использовать для уменьшения $a + 2$ на 1.

Ответ: все целые числа на отрезке $[48;120]$.

Вариант № 2

1. При покупке товара на сумму не менее 1500р магазин предоставляет скидку на последующие покупки в размере 26%. Имея в кармане 1800р, Саша хотел купить 5 кг шашлыка и 1 банку томатного соуса. В магазине шашлык продавался по цене 350р за кг, соус – по цене 70р за банку. Сообразив, что денег на покупку не хватает, Саша все-таки смог купить задуманное. Как он это сделал?

Ответ: первая покупка: 4 кг шашлыка, 1 банка соуса. Ее стоимость $350 \times 4 + 2 \times 70 = 1540$ р. Вторая покупка: 1 кг шашлыка. При наличии 26% скидки, ее цена $350 \cdot 0,74 = 259$. Сумма обеих покупок – 1799р.

2. Сколько существует различных пар целых чисел $(x; y)$, для которых $7x^2 + 5y^2 = 1155$? Найти возможные значения произведения $x \cdot y$.

Ответ: 4 пары, ± 70.

3. За восемь кг клубники заплатили 1700 и еще несколько рублей (меньше 100). За пятнадцать кг клубники заплатили 3100 и еще несколько рублей (меньше 100). Сколько стоит пять кг клубники?

Ответ: 1065 рубля.

4. Петя записал в первый столбик все трехзначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 6, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $21^3 = 9261$.

5. Двадцать семь одинаковых кубиков, на гранях которых нарисованы цифры от 1 до 6 так, что сумма цифр на противоположных гранях кубика постоянная и равна 7 (игральные кости), собрали в куб. Какие значения может принимать сумма чисел, нарисованных на всех гранях этого куба?

Ответ: все целые числа на отрезке $[90; 288]$.

Вариант № 3

1. При покупке товара на сумму не менее 1000р магазин предоставляет скидку на последующие покупки в размере 50%. Имея в кармане 1200р, Даша хотела купить 4 кг клубники и 6 кг сахара. В магазине клубника продавалась по цене 300р за кг, сахар – по цене 30р за кг. Сообразив, что денег на покупку не хватает, Даша все-таки смогла купить задуманное. Как она это сделала?

Ответ: первая покупка: 3 кг клубники, 4 кг сахара. Ее стоимость $300 \times 3 + 4 \times 30 = 1020$ р. Вторая покупка: 1 кг клубники, 2 кг сахара. При наличии 50% скидки, ее цена $(300 + 60) \cdot 0,5 = 180$. Сумма обеих покупок – 1200р.

2. Сколько существует различных пар целых чисел $(x; y)$, для которых $4x^2 + 7y^2 = 1600$? Найти все такие пары.

Ответ: 6 пар, $(\pm 20; 0)$, $(\pm 15; \pm 10)$.

3. За одиннадцать одинаковых мячей заплатили 3600 и еще несколько рублей (меньше 100). За четырнадцать таких же мячей заплатили 4500 и еще несколько рублей (меньше 100). Сколько стоит три мяча?

Ответ: 984 рубля.

4. Петя записал в первый столбик все пятизначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 7, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $28^5 = 17210368$.

5. Шестьдесят четыре одинаковых кубиков, на гранях которых нарисованы цифры от 1 до 6 так, что сумма цифр на противоположных гранях кубика постоянная и равна 7 (игральные кости), собрали в куб. Какие значения может принимать сумма чисел, нарисованных на всех гранях этого куба?

Ответ: все целые числа на отрезке $\left[144; 528\right]$.

Вариант № 4

1. При покупке товара на сумму не менее 900р магазин предоставляет скидку на последующие покупки в размере 25%. Имея в кармане 1200р, Петя хотел купить 3 кг мяса и 1 кг лука. В магазине мясо продавалось по цене 400р за кг, лук – по цене 50р за кг. Сообразив, что денег на покупку не хватает, Петя все-таки смог купить задуманное. Как он это сделал?

Ответ: первая покупка: 2 кг мяса и 2 кг лука. Ее стоимость 900 р. Вторая покупка: 1 кг мяса. При наличии 25% скидки, ее цена $400 \cdot 0,75 = 300$. Сумма обеих покупок – 1200р.

2. Сколько существует различных пар целых чисел $\left(x; y\right)$, для которых $12x^2 + 7y^2 = 4620$? Найти все такие пары.

Ответ: 8 пар, $\left(\pm 7; \pm 24\right), \left(\pm 14; \pm 18\right)$.

3. За девять одинаковых шарфов заплатили 4000 и еще несколько рублей (меньше 100). За одиннадцать таких же шарфов заплатили 4800 и еще несколько рублей (меньше 100). Сколько стоит шесть шарфов?

Ответ: 2670 рубля.

4. Петя записал в первый столбик все шестизначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 3, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $6^6 = 46656$.

5. Сто двадцать пять одинаковых кубиков, на гранях которых нарисованы цифры от 1 до 6 так, что сумма цифр на противоположных гранях кубика постоянная и равна 7 (игральные кости), собрали в куб. Какие значения может принимать сумма чисел, нарисованных на всех гранях этого куба?

Ответ: все целые числа на отрезке $\left[210;840\right]$.