

**Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
7 класс, Москва, Россия, март 2020**

Вариант № 1

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 6 часов; 2) после 3- часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

2. Каждое из четырех чисел 2, 4, 12, 32 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

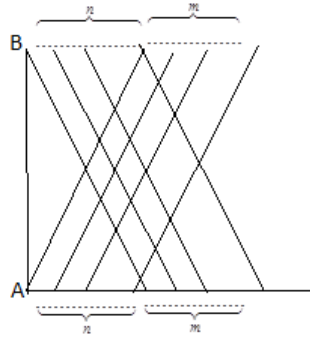
3. Представить число 2021 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ x^2 + z^2 - 4x - 6z = 0 \\ y^2 + z^2 + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

5. На плоскости нарисованы 81 отрезков, длиной 1; 2; ..., 81 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Ответы и решения

1. Из пункта A за первые $(n + t)$ часов, здесь $n = 6, t = 3$. Нужно выпустить 9 новых составов. По симметрии из пункта B должны отправиться такое же число составов, всего 18 составов. Чтобы обеспечить необходимый график движения, нужно отправить за первые 9 часов по 9 составов из пункта A и пункта B , всего 18 составов.



Ответ: 18 составов.

2. Пусть x – большее из искоемых чисел, y – меньшее.

Случай 1. $\frac{x}{y} = 2$, тогда $x = 2y, x - y = y, x + y = 3y, x \cdot y = 2y^2$.

Единственным числом из заданных, делящимся на 3, является 12. Значит, $12 = 3y, y = 4, x = 8$. Проверка: $x \cdot y = 32$.

Случай 2. $\frac{x}{y} = 4$, тогда $x = 4y, x - y = 3y, x + y = 5y, x \cdot y = 4y^2$. Ни одно из заданных чисел на 5 не делится, поэтому случай не реализуется.

Случай 3. $\frac{x}{y} = 12$, тогда $x = 12y, x - y = 11y, x + y = 13y, x \cdot y = 12y^2$. Ни одно из заданных чисел на 11 не делится, поэтому случай не реализуется.

Случай 4. $\frac{x}{y} = 32$, тогда $x = 32y, x - y = 31y, x + y = 33y, x \cdot y = 32y^2$. Ни одно из заданных чисел на 31 не делится, поэтому случай не реализуется.

Ответ: $x = 8, y = 4$.

3. Заметим, что $(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$, т.е. числа $a = 4n$ кратные четырем представляются в виде разности квадратов двух целых чисел, а значит, с условием нуля, представляются в виде суммы или разности четырех квадратов. Если $a = 4n \pm 1$, то имеет место представление

$$a = (n+1)^2 - (n-1)^2 \pm 1^2. \quad (1)$$

Если $a = 4n + 2$, то его можно представить в виде суммы или разности четырех квадратов:

$$a = (n+1)^2 - (n-1)^2 + 1^2 + 1^2. \quad (2)$$

Число 2021 запишем через представление (1), поэтому, например, $2021 = 4 \cdot 505 + 2$, $n = 505$, $2021 = 506^2 - 504^2 + 1^2$.

Ответ: $2021 = 506^2 - 504^2 + 1^2$.

4. Выделим полные квадраты:
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5, \\ (x-2)^2 + (z-3)^2 = 13, \\ (y+1)^2 + (z-3)^2 = 10. \end{cases}$$

Сложим все уравнения
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5, \\ (x-2)^2 + (z-3)^2 = 13, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14. \end{cases}$$

И, вычитая из третьего первое и второе, получим:

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 4, \\ (z-3)^2 = 9, \\ (y+1)^2 = 1. \end{cases}$$

Решаем квадратные уравнения и записываем все возможные решения. Система имеет восемь решений.

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(0; -2; 0)$, $(0; 0; 6)$, $(0; -2; 6)$, $(4; 0; 0)$, $(4; -2; 0)$, $(4; 0; 6)$, $(4; -2; 6)$.

5. Если было бы возможным выложить параллелограмм из всех отрезков, то сумма длин его противоположных сторон была бы четным числом (длины противоположных сторон параллелограмма равны), а значит, его периметр также число четное. Сумма длин всех отрезков равна $\frac{81 \cdot 82}{2} = 3321$ нечетная, поэтому такого параллелограмма не существует.

Покажем, что после удаления отрезка длины 1 такой параллелограмм (даже квадрат!) может быть построен. Объединяем попарно отрезки с длинами, равноудаленными от концов ряда $2, 3, 4, \dots, 79, 80, 81$:

$(2, 81), (3, 80), (4, 79), \dots, (2+k, 81-k), \dots, (41, 43)$. Каждый из 40 полученных отрезков имеет одинаковую длину, равную 83. Из них можно сложить квадрат со стороной 830 с периметром $830 \times 4 = 3320$.

Ответ: $p = 3320$.

Вариант № 2

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 5 часов; 2) после 2-часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

Ответ: 14 составов.

2. Каждое из четырех чисел 4, 18, 30, 144 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

Ответ: $x = 24, y = 6$.

3. Представить число 1917 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

Ответ: $1917 = 480^2 - 478^2 + 1^2$.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 6y = -5 \\ x^2 + z^2 + 2x - 4z = 8 \\ y^2 + z^2 + 6y - 4z = -3 \end{cases}$$

Ответ: $(1; -2; -1), (1; -2; 5), (1; -4; -1), (1; -4; 5),$

$(-3; -2; -1), (-3; -2; 5), (-3; -4; -1), (-3; -4; 5).$

5. На плоскости нарисованы 85 отрезков, длиной $1; 2; \dots; 85$ соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Ответ: $p = 3654$.

Вариант № 3

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 7 часов; 2) после 3-часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

Ответ: 20 составов.

2. Каждое из четырех чисел 4, 24, 40, 256 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

Ответ: $x = 32, y = 8$.

3. Представить число 1947 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

Ответ: $1947 = 488^2 - 486^2 - 1^2$.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y = -20 \\ x^2 + z^2 + 8x + 4z = -10 \\ y^2 + z^2 - 6y + 4z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; 1; 1), (-3; 1; -5), (-3; 5; 1), (-3; 5; -5),$
 $(-5; 1; 1), (-5; 1; -5), (-5; 5; 1), (-5; 5; -5).$

5. На плоскости нарисованы 89 отрезков, длиной 1; 2; ...; 89 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Ответ: $p = 4004$.

Вариант № 4

1. Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B . В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1) в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 8 часов; 2) после 4- часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь. Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

Ответ: 24 состава.

2. Каждое из четырех чисел 3, 32, 64, 768 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

Ответ: $x = 48$, $y = 16$.

3. Представить число 2019 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

Ответ: $2019 = 506^2 - 504^2 - 1^2$.

4. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y = -12 \\ x^2 + z^2 - 6x - 2z = -5 \\ y^2 + z^2 - 8y - 2z = -7 \end{cases} .$$

Ответ: (1; 1; 0), (1; 1; 2), (1; 7; 0), (1; 7; 2),
(5; 1; 0), (5; 1; 2), (5; 7; 0), (5; 7; 2).

5. На плоскости нарисованы 93 отрезка, длиной $1; 2; \dots; 93$ соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

Ответ: $p = 4370$.