***Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019***
***11 класс***

**Вариант № 1**

**1.** Каждого студента, присутствующего на лекции, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: отличник, спортсмен, блондин. Известно, что каждый четвертый блондин занимается спортом, а четверть спортсменов – блондины. Каждый третий спортсмен отличник, а треть отличников – не занимается спортом. Наконец, $5/12$ отличников – блондины, а $5/24$ блондинов – отличники. Только два студента блондина являются спортсменами и отличниками одновременно. Сколько студентов слушают лекцию, если по мнению лектора их не более восьмидесяти?

**2.** На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников

**3.** Действительные числа $x_1,x_2$ и $x_3$ являются тремя корнями уравнения $3x^3-px^2+28x-p=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1-2)^2+(x_2-2)^2+(x_3-2)^2$. При каком $p$ оно реализуется?

**4.** Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины $A$ и, совершив $2020$ прыжков, опять оказалась в той же вершине. С какой вероятностью это могло произойти?

**5.** Сколько существует различных пар целых чисел $a$ и $b$, для которых уравнение $ax^2+bx+108=0$ имеет целые положительные корни?

**6.** Окружность радиуса 1 касается прямой $P$ в точке $A$ и прямой $Q$ в точке $B$ так, что хорда стягивает дугу окружности в $60^0$. Прямые $P$ и $Q$ пересекаются в точке $F$. Точка $C$ расположена на луче $AF$, а точка $D$ – на луче $FB$ так, что $AC=BD=2$.

Найти длину медианы треугольника $CBD$, проведенной из вершины $B$.

*Ответы и решения*

**1.** Пусть среди студентов, присутствующих на лекции $x, y$ и $z$ — число спортсменов, блондинов и отличников соответственно. Тогда по условию имеем

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{4}, \quad \frac{x}{3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)z, \quad \frac{5z}{12}=\frac{5y}{24},$$

отсюда получаем

$$x=y=2z,$$

более того, видим, что $x$ и $y$ должны быть кратны 24, а $z$ — кратно 12. Тогда положим

$$x=y=24k, \quad z=12k, \ k\in\mathbb{Z}.$$

Пусть теперь $u$ – число спортсменов блондинов, не являющихся отличниками, $v$ – число спортсменов отличников, не являющихся блондинами, а $w$ – число блондинов отличников, не занимающихся спортом. Данные представлены на диаграмме. Тогда по условию


$$\begin{cases} u+2=\dfrac{y}{4}=6k, \\ v+2=\dfrac{x}{3}=8k, \\ w+2=\dfrac{5z}{12}=5k. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$u=6k-2, \ v=8k-2, \ w=5k-2.$$

При этом общее число студентов на лекции будет

$$x+y+z-u-v-w-2\cdot 2=41k+2.$$

По мнению лектора $41k+2\le 80,$ следовательно, $k=1.$ Таким образом, всего на лекции $41\cdot 1+2=43$ студента.

*Ответ:* 43 студента.

**2.** Очевидно, что уравнение не имеет решений при $x=0$. Допустим, $x>0$. Тогда имеем цепочку равносильных преобразований

$$4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+4x-4x\sin(x\pi+y)+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2+4x\left(1-\sin(x\pi+y)\right)=0.$$

Поскольку оба слагаемых в левой части последнего уравнения неотрицательны, то оно равносильно системе

$\begin{cases} (2x-1)^2=0, \\ 4x\left(1-\sin(x\pi+y)\right)=0, \end{cases}$ из которой, учитывая, что $x>0$, получаем $\begin{cases} 2x-1=0, \\ \sin(x\pi+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ \sin(\frac{\pi}{2}+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ \cos y=1. \end{cases}$

Таким образом, имеются решения $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=2\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Аналогично, при $x<0$, рассмотрим цепочку

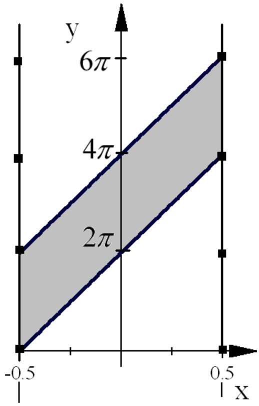
$$4x^2-4x\sin(x\pi+y)+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+4x-4x-4x\sin(x\pi+y)+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)^2+(-4x)\left(1+\sin(x\pi+y)\right)=0.$$

И далее, из неотрицательности слагаемых в левой части, получаем

$\begin{cases} (2x+1)^2=0, \quad x<0, \\ (-4x)\left(1+\sin(x\pi+y)\right)=0, \end{cases}$ что приводит к

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ \sin(-\frac{\pi}{2}+y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ \cos y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=2\pi m, m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Точки с координатами $\left(\frac{1}{2};2\pi k\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};2m\pi\right)$ лежат на параллельных прямых $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$ и различаются по ординате на величину кратную $2\pi$.




Таким образом, все допустимые четырехугольники являются либо трапециями, либо параллелограммами с высотой 1, со сторонами, лежащими на прямых $x = 1/2$ и $x = -1/2$. Любая трапеция содержит в себе меньший по площади параллелограмм из допустимых. Наименьшую площадь имеют параллелограммы с длиной основания равной $2\pi$.

*Ответ:* $S_{\min} = 2\pi$.

**3.** Пусть действительные числа $x_1, x_2$ и $x_3$ – корни уравнения $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ с учетом их возможной кратности. Тогда

$$3x^3 - px^2 + 28x - p \equiv 3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= 3x^3 - 3x^2(x_1 + x_2 + x_3) + 3x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3,$$

откуда $x_1 + x_2 + x_3 = p/3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 28/3$. С учетом этого целевое выражение преобразуется следующим образом:

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 =$$

$$= \frac{p^2}{9} - \frac{56}{3} - \frac{4p}{3} + 12 = \frac{p^2 - 12p - 60}{9}.$$

Теперь нарисуем график уравнения $3x^3 - px^2 + 28x - p = 0$ на плоскости $(x, p)$. Поскольку параметр входит в это уравнение линейно, удобнее разрешить его относительно $p$:

$$p(x^2 + 1) = 3x^3 + 28x = 3x(x^2 + 1) + 25x \Rightarrow p(x) = 3x + \frac{25x}{x^2 + 1}.$$

Найдем множество значений параметра $p$, при которых уравнение имеет три действительных корня. Для этого исследуем $p(x)$:

$$p'(x)=3+\frac{25(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4-19x^2+28}{(x^2+1)^2}=\frac{\left(x^2-4\right)(3x^2-7)}{(x^2+1)^2}$$

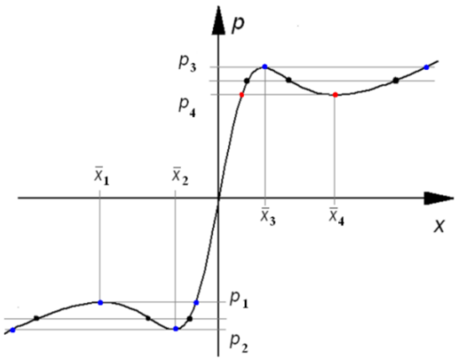
Нечетная функция $p(x)$ имеет минимумы в точках $\bar{x}_2=-\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\bar{x}_4=2$ и максимумы – в точках $\bar{x}_1=-2$, $\bar{x}_3=\frac{\sqrt{21}}{3}$,

$$p_1=p(\bar{x}_1)=-16,\ p_2=p(\bar{x}_2)=-\frac{7\sqrt{21}}{2},$$

причем .

$$p_3=p(\bar{x}_3)=\frac{7\sqrt{21}}{2},\ p_4=p(\bar{x}_4)=16.$$

Для всех $c\in\left(p_2;p_1\right)\cup\left(p_4;p_3\right)$ прямая $p=c$ пересекает график в трех точках и уравнение $3x^3-px^2+28x-p=0$ имеет три различных корня. При значениях параметра, совпадающих с одним из $p_1,p_2,p_3$ или $p_4$ (на границах отрезков) имеется две точки пересечения, что соответствует случаю кратных корней.




Квадратный трехчлен $\frac{p^2-12p-60}{9}$, убывая при $p<6$ и возрастая при $p>6$, на множестве $\left[p_2;p_1\right]\cup\left[p_4;p_3\right]$ принимает наименьшее возможное значение, когда $p=p_4=16$.

Таким образом, в условиях задачи

$$\min\left(\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2+\left(x_3-2\right)^2\right)=\frac{16^2-12\cdot16-60}{9}=\frac{4}{9}.$$

*Ответ*: наименьшее значение $\frac{4}{9}$ реализуется при $p=16$.

**4.** Рассмотрим некоторый промежуточный шаг в движении Кузи. Если она на этом шаге находится в точке $A,$ то вероятность попасть в $A$ на следующем шаге равна нулю. Если же она находится в любой из оставшихся точек, $B, C$ или $D,$ то вероятность попасть в $A$ на следующем шаге равна $1/3,$ так как из каждой такой точки есть три равновозможных пути, только один из которых приводит в $A.$ Пусть $p_k -$ вероятность того, что на $k-$ом шаге блоха находится в точке $A.$ Соответственно не в точке $A$ она находится с вероятностью $\left(1-p_k\right).$ Тогда на следующем шаге она окажется в $A$ с вероятностью

$$p_{k+1}=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}+p_k\cdot 0=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $p_0=1,\quad p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{3},$ а далее получим

$$p_3=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9},\ \ldots,\ p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}.$$

Формулу для $p_n$ при $n\geq 2$ докажем методом математической индукции.

*База индукции:* $p_2=\frac{(-1)^2}{3^{2-1}}=\frac{1}{3}-$ верно.

*Шаг индукции:* пусть формула верна для $n=k,$ то есть $p_k=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{(-1)^k}{3^{k-1}}.$ Тогда

$$p_{k+1}=\left(1-p_k\right)\cdot\frac{1}{3}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots-\frac{(-1)^k}{3^{k-1}}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{9\cdot 3}-\frac{1}{27\cdot 3}+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k-1}\cdot 3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{3^k},$$

то есть формула верна и для $n=k+1.$ А значит верна и при любых $n\geq 2.$ Видим, что $p_n$ представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем $-1/3$. Следовательно,

$$P(A)=p_{2020}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(-1/3)^{2019}}{1-(-1/3)}=\frac{1+(1/3)^{2019}}{4}=\frac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}\simeq\frac{1}{4}.$$

*Ответ:* $P(A)=\dfrac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}$.

**5.** Рассмотрим сначала пары, в которых $a=0$. Для таких пар получим линейное уравнение $bx+108=0$. Пусть $x_1-$ его положительный корень. Имеем $b\cdot x_1=-108=-2^2\cdot 3^3$, значит, $b<0$, и числа $b$ и $x_1$ не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Всего имеется $(2+1)(3+1)=12$ различных (положительных) делителей числа 108, поскольку у делителя кратность двойки можно выбрать тремя способами: 0, 1 или 2; при этом кратность тройки можно выбрать четырьмя способами: 0, 1, 2 или 3. Таким образом, $x_1$ может принимать 12 различных значений, при каждом из них $b$ определяется однозначно: $b={}^{-108}\!/_{x_1}$. Соответственно, существует 12 пар вида $(0,b)$.

Пусть теперь $a\neq 0$ и $x_1, x_2-$ целые положительные решения уравнения $ax^2+bx+108=0$. Тогда по теореме Виета получим $a\cdot x_1\cdot x_2=108=2^2\cdot 3^3$. Следовательно, $a>0$, а числа $a$, $x_1$, $x_2$ не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Таким образом, имеют место разложения $a=2^s3^q, x_1=2^{s_1}3^{q_1}, x_2=2^{s_2}3^{q_2}$, где $s,s_1,s_2,q,q_1,q_2\geq 0-$ кратности простых множителей, причем

$$s_1+s_2=2-s,\quad q_1+q_2=3-q.$$

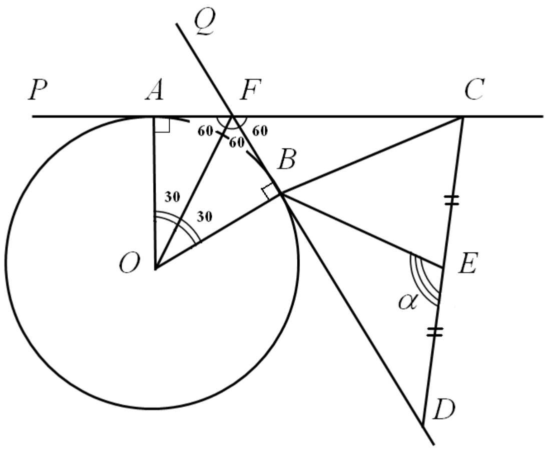
При фиксированных $s,q$ существует $(3-s)(4-q)$ способов выбрать $s_1,q_1,$ то есть выбрать $x_1$. При этом $s_2,q_2$, а значит и $x_2$ определяются однозначно: $s_2=2-s-s_1$, $q_2=3-q-q_1$. В силу того, что наборы $(x_1,x_2)$, очевидно обладают симметрией, различных значений сумм будет $\left[\frac{(3-s)(4-q)+1}{2}\right]$(квадратные скобки означают целую часть числа).

| $a$ | | Способов выбрать $s_1$ $(3-s)(4-q)$ | Различных значений сумм $x_1+x_2$ |
|---|---|---|---|
| $q$ | $s$ | | |
| 0 | 0 | 12 | 6 |
| | 1 | 8 | 4 |
| | 2 | 4 | 2 |
| 1 | 0 | 9 | 5 |
| | 1 | 6 | 3 |
| | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 0 | 6 | 3 |
| | 1 | 4 | 2 |
| | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 2 |
| | 1 | 2 | 1 |
| | 2 | 1 | 1 |
| | | | Всего: 32 |

Поскольку по теореме Виета $b=-(x_1+x_2)a$, число различных пар $a$ и $b$, удовлетворяющих условию задачи, в случае квадратного уравнения равно 32.

Общее количество пар будет 32+12 =44.

*Ответ:* 44 пары.




**6.** Пусть точка $O$ – центр окружности. Тогда $OA \perp P$, $OB \perp Q$, $OA = OB = 1$.

По условию хорда $AB$ стягивает дугу окружности в $60°$, значит $\measuredangle AOB = 60°$.

Далее, $AF = FB$, так как это отрезки касательных, проведенных к данной окружности из одной точки.

Проведем отрезок $OF$. Тогда прямоугольные треугольники $AOF$ и $BOF$ равны по гипотенузе и катету. Значит, $\measuredangle AOF = \measuredangle BOF = 30°$. Тогда $\measuredangle AFO = \measuredangle BFO = 60°$. Отсюда $\measuredangle BFC = 60°$.

Из прямоугольных треугольников $AOF$ и $BOF$ получаем $AF = FB = 1 \cdot \operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3}$.

Применим теорему косинусов в треугольниках $BFC$ и $DFC$:

$$BC^2 = BF^2 + CF^2 - 2 \cdot BF \cdot CF \cdot \cos 60° =$$

$$= \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5 - 2\sqrt{3},$$

$$CD^2 = DF^2 + CF^2 - 2 \cdot DF \cdot CF \cdot \cos 60° =$$

$$= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5.$$

Рассмотрим теперь треугольник $BCD$. Пусть $m_B = BE$ – его медиана. Тогда $CE = DE = \frac{1}{2}CD$.

Применим теорему косинусов в треугольниках $BCE$ и $BDE$:

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2 \cdot BE \cdot DE \cdot \cos\alpha,$$
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\left(180^\circ - \alpha\right) =$$
$$= BE^2 + CE^2 + 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\alpha.$$

Складывая, получим
$$BC^2 + BD^2 = 2 \cdot BE^2 + DE^2 + CE^2,$$
откуда, домножив на 2 и учитывая равенство $CE$ и $DE$, получим:
$$4 \cdot BE^2 = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - 2\left(DE^2 + CE^2\right) = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2.$$
Окончательно,
$$BE^2 = \frac{2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2}{4} = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{3} + 4\right) - 5}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда медиана $m_B = BE = \sqrt{\dfrac{13 - 4\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

*Ответ:* $m_B = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

## Вариант № 2

**1.** Каждого спортсмена, участвующего в марафоне, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: веселые, тренированные, новички. Известно, что каждый шестнадцатый веселый – новичок, а пятая часть новичков – веселятся. Каждый пятый тренированный спортсмен веселый и только каждый десятый весельчак тренирован. Наконец, пятая часть новичков оказалась тренированной, а каждый восьмой из тренированных – новичок. Только три участника марафона являются тренированными, веселыми новичками одновременно. Сколько спортсменов вышло на старт, если им было выдано не более 150 номеров?

*Ответ:* 130 спортсменов.

**2.** На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x; y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $16x^2 - 8x\sin(2x\pi + 3y) + 1 = 0.$ Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

*Ответ:* $S_{\min} = \dfrac{\pi}{3}.$

**3.** Действительные числа $x_1, x_2$ и $x_3$ являются тремя корнями уравнения $x^3 - 3x^2 + 2(1-p)x + 4 = 0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $\left(x_1 - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 + \left(x_3 - 1\right)^2$. При каком $p$ оно реализуется?

*Ответ:* наименьшее значение $6$ реализуется при $p = 1$.

**4.** Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины $A$ и, совершив 2024 прыжка, оказалась не в вершине $A$. С какой вероятностью это могло произойти?

*Ответ:* $P\left(A\right) = \dfrac{3^{2024} - 1}{4 \cdot 3^{2023}}.$

**5.** Сколько существует различных пар целых чисел $a$ и $b$, для которых уравнение $ax^2 + bx + 16875 = 0$ имеет целые положительные корни?

*Ответ:* 78+20= 98 пар.

**6.** Окружность радиуса $2$ касается прямой $P$ в точке $A$ и прямой $Q$ в точке $B$ так, что хорда $AB$ стягивает дугу окружности в $60^0$. Прямые $P$ и $Q$ пересекаются в точке $F$. Точка $C$ расположена на луче $FA$, а точка $D$ – на луче $BF$ так, что $AC = BD = 3$. Найти длину медианы треугольника $CBD$, проведенной из вершины $B$.

*Ответ:* $m_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 1.$

## Вариант № 3

**1.** В процессе опроса группы старшеклассников выяснилось, что каждого из них можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: умеющих водить автомобиль, мотоцикл и кататься на самокате. Известно, что каждый шестой водитель автомобиля может управлять мотоциклом, а каждый третий мотоциклист способен вести автомобиль. Каждый четвертый автомобилист может ехать на самокате, при этом шестая часть самокатчиков может управлять автомобилем. Наконец, каждый четвертый мотоциклист может ехать на самокате, при этом только двенадцатая часть самокатчиков может управлять мотоциклом. Только один самокатчик признался, что умеет ездить на машине и мотоцикле. Сколько школьников участвовало в опросе, если анкет было выдано не более семидесяти?

*Ответ:* 60 школьников.

**2.** На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $9x^2-6x\cos\left(\dfrac{3\pi x}{2}+2y\right)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

*Ответ:* $S_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$.

**3.** Действительные числа $x_1, x_2$ и $x_3$ являются тремя корнями уравнения $2x^3-(p-4)x^2-(2p-1)x-p+8=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. При каком $p$ оно реализуется?

*Ответ:* наименьшее значение $\dfrac{417}{64}$ реализуется при $p=\dfrac{15}{4}$.

**4.** Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины $A$ и, совершив 2019 прыжков, оказалась в вершине $B$. С какой вероятностью это могло произойти?

*Ответ:* $P(A)=\dfrac{3^{2019}+1}{4\cdot 3^{2019}}.$

**5.** Сколько существует различных пар целых чисел $a$ и $b$, для которых уравнение $ax^2+bx+1944=0$ имеет целые положительные корни?

*Ответ:* 108+24=132 пары.

**6.** Окружность радиуса $3$ касается прямой $P$ в точке $A$ и прямой $Q$ в точке $B$ так, что хорда $AB$ стягивает дугу окружности в $60^0$. Прямые $P$ и $Q$ пересекаются в точке $F$. Точка $C$ расположена на луче $AF$, а точка $D$ – на луче $FB$ так, что $AC=BD=4$. Найти длину медианы треугольника $CAD$, проведенной из вершины $A$.

*Ответ:* $m_A=2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}.$

## Вариант № 4

**1.** Выяснилось, что каждого из опрошенных можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: любитель рока, джаза и классики. Известно, что каждый пятый любитель рока с удовольствием слушает джаз, а каждый третий поклонник джаза слушает рок. Четыре из каждых пятнадцати любителей классики могут слушать рок, а пятая часть поклонников рока получает удовольствие, слушая классику. Наконец, каждый пятый любитель классики является поклонником джаза, а четвертая часть джазовых фанатов слушает классику. Пять любителей рока считают себя поклонниками джаза и классики. Сколько человек было опрошено, если их число не превысило девяносто?

*Ответ:* 77 человек.

**2.** На плоскости расположены четырехугольники, координаты $(x;y)$ вершин которых удовлетворяют уравнению $36x^2-12x\cos(3\pi x+4y)+1=0$. Найти минимально возможное значение площадей таких четырехугольников.

*Ответ:* $S_{\min}=\dfrac{\pi}{6}.$

**3.** Действительные числа $x_1, x_2$ и $x_3$ являются тремя корнями уравнения $x^3-(p+4)x^2+(4p+5)x-4p-5=0$ с учетом их возможной кратности. Найти наименьшее при этих условиях значение выражения $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2$. При каком $p$ оно реализуется?

*Ответ:* наименьшее значение $\dfrac{257}{16}$ реализуется при $p=-\dfrac{5}{4}$.

**4.** Блоха Кузя может совершать прыжки из каждой вершины правильного тетраэдра $ABCD$ в три соседние вершины, причем выбор этих вершин случайный и равновозможный. Прыгать Кузя начала из вершины $A$ и, совершив 2018 прыжков, оказалась в вершине $C$. С какой вероятностью это могло произойти?

*Ответ:* $P(A)=\dfrac{3^{2018}-1}{4\cdot 3^{2018}}$.

**5.** Сколько существует различных пар целых чисел $a$ и $b$, для которых уравнение $ax^2+bx+432=0$ имеет целые положительные корни?

*Ответ:* 78+20=98 пар.

**6.** Окружность радиуса $4$ касается прямой $P$ в точке $A$ и прямой $Q$ в точке $B$ так, что хорда $AB$ стягивает дугу окружности в $60^0$. Прямые $P$ и $Q$ пересекаются в точке $F$. Точка $C$ расположена на луче $FA$, а точка $D$ – на луче $BF$ так, что $AC=BD=5$. Найти длину медианы треугольника $CAD$, проведенной из вершины $A$.

*Ответ:* $m_A=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-2$.

***Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в регионах, осень 2019***
***11 класс, комплект 1***

## Вариант № 1

**1.** Петя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 270 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Петя может в каждый момент времени $t$ (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1]$ Петя заметил, что $T>1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – $60$ км/час. На каком расстоянии от пункта $A$ находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

**2.** Решить систему $\begin{cases} \cos x\cdot\cos(xy)=1 \\ 15y^2=6+y\cos\left(x/2\right) \end{cases}$.

**3.** Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел $m$ и $n$ числа $m+2019n$ и $n+2019m$ имеют общий простой делитель $d>5$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа $d$ .

**4.** Случайная величина $a$ равномерно распределена на отрезке $[-1;5]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $x^2-ax+a-3=0$ не меньше $-1$.

**5.** При каких значениях $a$ уравнение $x^3-3(a-2)x+3(a-2)=0$ имеет ровно два корня? Найти эти корни.

**6.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ расположена точка $D$ так, что $AD:AC=1:4$, при этом $2BD+BC=3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке $O$ пересекает $BD$ в точках $M$ и $N$. Найти угол $MON$.

*Ответы и решения*

**1.** По условию

$$T(t)=\frac{270-s(t)}{s(t)/t}=\frac{t(270-s(t))}{s(t)}=C>1,\ t\in[0,5;1].$$

Тогда $s(t)=\dfrac{270t}{t+C}$ на этом отрезке. Скорость движения

$v(t)=s'(t)=\dfrac{270C}{(t+C)^2}=60$ при $t=1$, т.е.

$$2c^2-5c+2=0\to C_1=2,\ C_2=\frac{1}{2}$$

Второе значение константы недопустимо по условию. Таким образом, $s(t)=\dfrac{270t}{t+2}$ и $s(1)=90$.

$$v(t)=\left.\frac{540}{(t+2)^2}\right|_{t=\frac{1}{2}}=\frac{432}{5}=86,4 \text{ км/час.}$$

*Ответ*: 1) $90$ км; 2) $86,4$ км/час

**2.** Возможны следующие случаи.

*Случай* 1. $\cos x=1,\ \ x=2\pi k, k\in Z, \cos xy=1$

$$\cos(x/2)=\cos(\pi k)=(-1)^k$$

*Случай* 1.а $k=2m,\ x=4\pi m$

$$15y^2-y-6=0\to\begin{cases} y_1=2/3\\ y_2=-3/5\end{cases}$$

Для $y=2/3$

$$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)=\cos\left(\frac{8\pi m}{3}\right)=1\to\frac{8\pi m}{3}=2\pi s\to$$

$$\to 4m=3s\to\begin{cases}m=3t\\ s=4t\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим первую серию решений $\begin{cases}x=12\pi t\\ y=2/3\end{cases}$.

Для $y=-3/5$

$$\cos\left(-\frac{3x}{5}\right)=\cos\left(\frac{12\pi m}{5}\right)=1\to\frac{12\pi m}{5}=2\pi s\to$$

$$\to 6m=5s\to\begin{cases}m=5t\\ s=6t\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим вторую серию решений $\begin{cases}x=20\pi t\\ y=-3/5\end{cases}$.

*Случай* 1.б $k=2m+1,\ x=2\pi(2m+1)$

$$15y^2+y-6=0\to\begin{cases}y_3=-2/3\\ y_4=3/5\end{cases}$$

Для $y=-2/3$

$$\cos\left(-\frac{2x}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi(2m+1)}{3}\right)=1\to\frac{4\pi(2m+1)}{3}=2\pi s\to$$

$$\to 4m-3s=-2\to\to\begin{cases}m=3t-2\\ s=4t-2\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим третью серию решений $\begin{cases}x=6\pi(2t-1)\\ y=-2/3\end{cases}$.

Для $y=3/5$

$$\cos\left(\frac{3x}{5}\right)=\cos\left(\frac{6\pi(2m+1)}{5}\right)=1\rightarrow\frac{6\pi(2m+1)}{5}=2\pi s\rightarrow$$

$$\rightarrow 6m-5s=-3\rightarrow\begin{cases}m=5t-3\\ s=6t-3\end{cases},t\in Z$$

Тогда получим четвертую серию решений $\begin{cases}x=10\pi(2t-1)\\ y=3/5\end{cases}$.

*Случай* 2. $\cos x=-1,\cos xy=-1, x=\pi(2k+1)$

$xy=\pi(2m+1), x=\pi(2k+1)\rightarrow y=\dfrac{2m+1}{2k+1}$ – рациональное число.

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\right)=0, \forall k\in Z\rightarrow 15y^2=6\rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ – иррациональное число. Случай 2 решений не имеет.

*Ответ*:

$$\begin{cases}x=12\pi t\\ y=2/3\end{cases},\ \begin{cases}x=20\pi t\\ y=-3/5\end{cases},\ \begin{cases}x=6\pi(2t-1)\\ y=-2/3\end{cases},\ \begin{cases}x=10\pi(2t-1)\\ y=3/5\end{cases},t\in Z$$

**3.** Если $m+2019n$ и $n+2019m$ делятся на $d$, то число

$$2019(m+2019n)-(n+2019m)=(2019^2-1)n$$

также делится на $d$. Если $n$ делится на $d$, $m+2019n$ делится на $d$, то $m$ делится на $d$ и числа $m$ и $n$ взаимно простыми не являются. Следовательно, на $d$ делится число

$$2019^2-1=2018\cdot 2020=2^3\cdot 5\cdot 101\cdot 1009\,.$$

Таким образом, наименьшим допустимым простым числом является $d=101$. Осталось найти взаимно простые $m$ и $n$, на которых оно реализуется. Например, $m=102, n=1$. Тогда

$$m+2019n=102+2019=2121=21\cdot 101 \text{ и}$$

$$n+2019m=1+2019\cdot 102=205939=2039\cdot 101.$$

*Ответ*: $d_{\min}=101.$

**4.** Дискриминант квадратного трехчлена

$$D=a^2-4a+12=(a-2)^2+8>0$$

и поэтому уравнение всегда имеет два различных корня. Воспользуемся условиями расположения корней квадратного трехчлена. В случае положительного дискриминанта корни

$$f(x) = x^2 + px + q$$

лежат справа от $x=b$ тогда и только тогда, когда $f(b)\geq 0$ и абсцисса вершины графика также лежит справа от $x=b$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0 \\ \dfrac{a}{2} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

Таким образом, пространство всех событий составляет отрезок [-1;5], а пространство благоприятных событий – отрезок [1;5]. Вероятность искомого события $P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

*Ответ*: $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

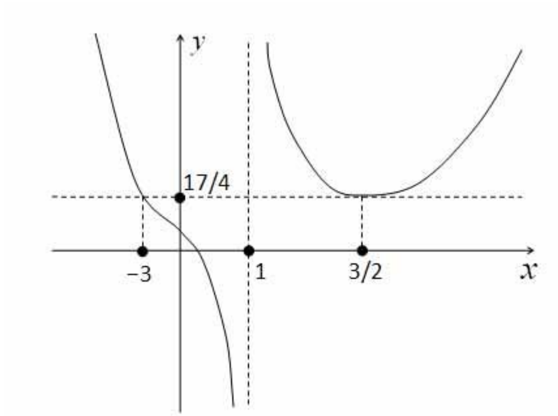
**5.** Разрешая уравнение относительно параметра, получаем

$$a = \frac{x^3 + 6x - 6}{3(x-1)}.$$

Производная

$$a'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{3(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

имеет только одну точку смены знака (с минуса на плюс) $x=3/2$. Следовательно, это единственная точка экстремума (минимума) $a(x)$, в которой $a=17/4$




Из графика функции видно, что два решения уравнение имеет в единственном случае $a$ = 17/4. Само уравнение при этом значении параметра принимает вид

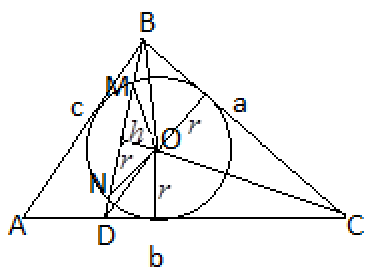
$$x^2-\frac{27}{4}x+\frac{27}{4}=0$$

и имеет корни $x=-3$ и $x=3/2$.

*Ответ*: $a$=17/4; $x$=–3 и $x$=3/2.

**6.** Введем обозначения: $a,b,c-$ стороны треугольника $ABC$, $h-$ высота треугольников $BDO$ и $MNO$, $r-$ радиус вписанной окружности. Площадь треугольника $BDC$ равна $\frac{3}{4}S_{ABC}=\frac{3}{8}(a+b+c)\cdot r$.

С другой стороны,



$S_{BDC}=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}r\cdot\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}BD\cdot h$. Приравнивая полученные выражения, получим

$$\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}r\cdot\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}BD\cdot h=\frac{3}{8}(a+b+c)\cdot r\to 4BD\cdot h=(3c-a)r\to$$

$$\to\frac{h}{r}=\frac{3AB-BC}{4BD}=\frac{2BD}{4BD}=\frac{1}{2}.$$

Но

$$\frac{h}{r}=\sin\angle MNO\to\angle MNO=30^0\to\angle MON=180^0-2\cdot 30^0=120^0.$$

*Ответ*: $120^0$.

## Вариант № 2

**1.** Костя совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 320 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Костя может в каждый момент времени $t$ (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – $60$ км/час. На интервале времени $[1;2]$ Костя заметил, что $T>1$ и не меняется. На каком расстоянии от пункта $A$ находился автомобиль через два часа после начала движения? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 2 часа после начала движения?

*Ответ*: 1) $128$ км; 2) $38,4$ км/час.

**2.** Решить систему $\begin{cases}\sin x\cdot\cos(xy)=-1\\ 10y^2-ytg(x/2)=2\end{cases}$.

*Ответ*: $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{2}(4t+1) \\ y = -\dfrac{2}{5} \end{cases}, t \in Z$

**3.** Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел $m$ и $n$ числа $m+2024n$ и $n+2024m$ имеют общий простой делитель $d>7$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа $d$.

*Ответ*: $d_{\min}=17.$

Например,

$$m=16,\, n=1 \to 2024m+n=2024\cdot16+1=32385=17\cdot1905,$$

$$m+2024n=16+2024=17\cdot120$$

**4.** Случайная величина $a$ равномерно распределена на отрезке $[-4;4]$. Найти вероятность того, что хотя бы один из корней квадратного уравнения $x^2-2ax-a-4=0$ по абсолютному значению не превосходит $1$.

*Ответ*: $P(A)=\dfrac{1}{2}.$

**5.** При каких значениях $a$ уравнение

$$x^3-12(a-1)x+4(a+2)=0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

*Ответ*:1) $a=2$; 2) $x_1=-4,\ x_2=2.$

**6.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ расположена точка $D$ так, что $AD:AC=1:3$, при этом $BD+2BC=4AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке $O$ пересекает $BD$ в точках $M$ и $N$. Найти угол $MON$.

*Ответ*: $2\arccos\dfrac{1}{6}.$

## Вариант № 3

**1.** Вася совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 360 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Вася может в каждый момент времени $t$ (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T = T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. На интервале времени $[0,5;1,5]$ Вася заметил, что $T > 1$ и не меняется. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – $80$ км/час. На каком расстоянии от пункта $A$ находился автомобиль в этот момент? С какой скоростью двигался автомобиль спустя 30 мин после начала движения?

*Ответ*: 1) $120$ км; 2) $115,2$ км/час.

**2.** Решить систему $\begin{cases} \sin(xy)\cdot\cos x = 1 \\ 8y^2 = 2y\sin\left(x/2\right) + 15 \end{cases}$.

*Ответ*: $\begin{cases} x = \pi(4t+1) \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \pi(4t+3) \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}, t \in Z$

**3.** Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел $m$ и $n$ числа $m+1941n$ и $n+1941m$ имеют общий простой делитель $d > 8$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа $d$.

*Ответ*: $d_{\min} = 97$.

Например,

$$m = 96, n = 1 \to 1941m + n = 1941\cdot 96 + 1 == 97\cdot 1921,$$

$$m + 1941n = 96 + 1941 = 97\cdot 21$$

**4.** Случайная величина $a$ равномерно распределена на отрезке $[-2;1]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $ax^2 - x - 4a + 1 = 0$ по абсолютному значению превосходят $1$.

*Ответ*: $P(A)=\dfrac{7}{9}$.

**5.** При каких значениях $a$ уравнение

$$x^3+27(a+1)x+18(a-1)=0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

*Ответ*:1) $a=-2$; 2) $x_1=-3,\ x_2=6$.

**6.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ расположена точка $D$ так, что $AD:AC=1:5$, при этом $5\sqrt{2}\cdot BD+2BC=8AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке $O$ пересекает $BD$ в точках $M$ и $N$. Найти угол $MON$.

*Ответ*: $90^0$.

## Вариант № 4

**1.** Даня совершает поездку на автомобиле от пункта А до пункта Б, расстояние между которыми 300 км. Маршрут поездки выведен на дисплей компьютера. Даня может в каждый момент времени $t$ (часы) получать информацию о пройденном пути $s(t)$ (км), скорости движения $v(t)$ (км/час) и предполагаемом времени $T=T(t)$ (час) до окончания поездки. В программу вычисления $T(t)$ заложено предположение о том, что оставшуюся часть пути автомобиль будет ехать со скоростью, равной средней скорости его движения на отрезке времени $[0;t]$. Через час после начала движения, он посмотрел на спидометр – $75$ км/час. На интервале времени $[1;1,5]$ Даня заметил, что $T$ не меняется. На каком расстоянии от пункта $A$ находился автомобиль через 90 мин после начала движения и какова была его скорость?

*Ответ*: 1) $180$ км; 2) $48$ км/час.

**2.** Решить систему $\begin{cases} \sin x\cdot\sin(xy)=-1 \\ 6y^2=ytg\left(x/2\right)+1 \end{cases}$.

*Ответ*: $\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2}(4t+1), \\ \quad y = \dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad t \in Z.$

**3.** Известно, что для некоторых положительных взаимно простых чисел $m$ и $n$ числа $m+1947n$ и $n+1947m$ имеют общий простой делитель $d > 9$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение числа $d$ .

*Ответ*: $d_{\min} = 139.$

Например,

$$m = 138, n = 1 \to 1947m + n = 1947 \cdot 138 + 1 == 139 \cdot 1933,$$

$$m + 1947n = 138 + 1947 = 139 \cdot 15$$

**4.** Случайная величина $a$ равномерно распределена на отрезке $[-1; 4]$. Найти вероятность того, что оба корня квадратного уравнения $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$ отрицательные.

*Ответ*: $P(A) = \dfrac{1}{5}.$

**5.** При каких значениях $a$ уравнение

$$x^3 + 48(a+2)x + 32(a-1) = 0$$

имеет ровно два корня? Найти эти корни.

*Ответ:* 1) $a = -3$; 2) $x_1 = -4,\ x_2 = 8.$

**6.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ расположена точка $D$ так, что $AD : AC = 2 : 5$, при этом $BD + 2BC = 3AB$. Вписанная в треугольник окружность с центром в точке $O$ пересекает $BD$ в точках $M$ и $N$ . Найти угол $MON$ .

*Ответ:* $2\arccos\dfrac{1}{5}.$

**Примеры заданий из базы заданий дистанционного отборочного тура олимпиады «Росатом», 11 класс**

База заданий дистанционного отборочного тура олимпиады «Росатом» (который проводится только для школьников 11 класса) содержит более 300 задач с числовым ответом (который и проверяется). Эти задачи ежегодно обновляются, добавляются новые, меняются числа в каждой задаче. Каждый участник тура получает 6 задач случайным образом. Чтобы исключить ошибки, связанные с округлением ответа (если ответ нецелый), в каждой такой задаче задается небольшой интервал значений, все ответы из которого считаются правильными. Для прохода в заключительный тур нужно было решить пять задач из шести.

**1.** Найдите наибольшее на отрезке $[0;10\pi]$ решение уравнения $|2\sin x-1|+|2\cos 2x-1|=0$.

Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 27,7

**2.** Найти длину ломаной на плоскости, координаты точек $(x;y)$, которой удовлетворяют условию: $\begin{cases} |2y-|x||-x=2 \\ -2\le x\le 1 \end{cases}$. Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и ввести в предложенное поле.

**Ответ:** $7,24$

**3.** Сумма двух натуральных чисел равна 2013. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, прибавить к полученному числу единицу, а затем умножить результат на пять, то получится другое число. Найти эти числа. Наибольшее из них ввести в предложенное поле.

Ответ: 1913

**4.** Сумма двух натуральных чисел равна 2014. Если у одного из них зачеркнуть две последние цифры, умножить полученный результат на три, то получится число на шесть большее другого числа. Найти эти числа. Наименьшее из них ввести в предложенное поле.

Ответ: 51

**5.** Найти дробь $\frac{p}{q}$ с наименьшим возможным натуральным знаменателем, для которой

$\frac{1}{2014}<\frac{p}{q}<\frac{1}{2013}$. Знаменатель этой дроби введите в предложенное поле

Ответ: 4027

**6.** Сколько существует пар натуральных чисел $(a;b)$, для которых число $5a-3$ кратно $b$, а число $5b-1$ кратно $a$? Количество пар указанных чисел ввести в предложенное поле.

Ответ: 18

**7.** Координаты $(x;y;z)$ точки $M$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $xy$, $yz$, $xz$ в указанном порядке являются членами арифметической прогрессии, при этом $z \geq 1$ и $x \neq y \neq z$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение квадрата расстояния от точки $M$ до точки $N(1;1;1)$. Ответ ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 18

**8.** Жители деревни Разумеево, удаленной от реки на $3$ км, любят ходить в гости в деревню Вкуснотеево, расположенную на $3{,}25$ км. ниже по течению, на другом берегу реки, удаленную от берега на $1$ км. Ширина реки $500$ м, скорость течения $1\,км/час$, берега – параллельные прямые. Жители Разумеево проложили самый короткий маршрут с учетом того, что переплывают реку всегда в направлении перпендикулярном береговой линии с собственной скоростью $2\,км/час$. Сколько времени занимает этот путь, если по земле можно передвигаться со скоростью не большей $4\,км/час$? Ответ в часах ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 1,5

**9.** Найти последние две цифры числа $14^{14^{14}}$. Ответ ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 36

**10.** Найти число двоек в разложении на множители числа $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot \ldots \cdot 4020.$ Ответ ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 2010

**11**. При каких $a$ уравнение $|x| = ax-2$ не имеет решений? Длину промежутка значений параметра $a$ введите в предложенной поле.

**Ответ:** 2

**12**. При каких $a$ уравнение $|x-3| = ax-1$ имеет два решения? Середину промежутка значений параметра $a$ введите в предложенное поле. Ответ округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.

**Ответ:** 0,667

**13**. При каком значении $a$ уравнение $|x-2| = ax-2$ имеет бесконечное число решений? Ответ ввести в предложенное поле.

**Ответ:** 1