Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2019
10класс

Вариант № 1

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C, делая в минуту 60 шагов, с длиной шага -40 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 200 м от пункта C. Даня идет в C по дороге B со скоростью 70 шагов в минуту, с длиной шага 60 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 300 м от C. Каждый из них, пройдя пункт C, не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

2. При каких a уравнение $\sin(x+3a)-\sin 7a\cdot\cos x=0$ имеет два решения x_1 и x_2, для которых $x_1-x_2\neq\pi k, k\in Z$?

3. При каких x уравнение $y^2+16z^2+4xyz-3=0$ имеет решение при любых y ?

4. Натуральное число a имеет 101 различных делителей, включая 1 и a. Найти сумму и произведение таких делителей.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны $2\sqrt{3}$ и 4 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 1. Найти угол между прямыми BC и AD.

Ответы и решения

1. По условию задачи Саша делает один шаг за 1 секунду, а Даня – за $\frac{6}{7}$ секунды. Тогда через 6 секунд Саша и Даня сделают одновременно целое число шагов, а именно Саша – 6 шагов, а Даня – 7 шагов. Следовательно, нам надо рассматривать моменты времени, кратные 6 секундам, т.е. $t = 6k, \quad k = 1, 2, \ldots$ Так как длина шага Саши равна 0,4 м, а длина шага Дани равна 0,6 м, то за время $t = 6k$ секунд Саша пройдет $6 \cdot k \cdot 0,4 = 2,4k$ метров, а Даня – $7 \cdot k \cdot 0,6 = 4,2k$ метров. Расстояние между Сашей и Даней по дороге в такие моменты времени равно:

$$d(k) = |200 - 2,4k| + |300 - 4,2k|.$$

Рассмотрим функцию $d(x), \ x \in R.$ При $x \le x_1 = \frac{300}{4,2} = 71,42\ldots$

$$d(x) = 200 - 2,4x + 300 - 4,2x = 500 - 6,6x.$$

При $x_1 \le x \le x_2 = \frac{200}{2,4} = 83,(3)$

$$d(x) = 200 - 2,4x - 300 + 4,2x = 1,8x - 100.$$

При $x \ge x_2$

$$d(x) = -200 + 2,4x - 300 + 4,2x = 6,6x - 500.$$

Мы получили, что при $x \le x_1$ функция $d(x)$ убывает, а при $x \ge x_1 -$ возрастает. Это означает, что в точке $x = x_1$ функция $d(x)$ принимает наименьшее значение. Чтобы найти минимум функции $d(k)$ рассмотрим ближайшие к $x = x_1$ целочисленные значения k: $k_1 = [x_1] = 71$ и $k_2 = [x_1] + 1 = 72.$ Вычислим $d(71) = 500 - 6,6 \cdot 71 = 31,4$ и $d(72) = 1,8 \cdot 72 - 100 = 29,6.$ Следовательно, наименьшее возможное расстояние между Сашей и Даней равно $29,6$ м. Так как оно достигается при $k = 72$, то число шагов Саши, сделанных к этому времени, равно $6\cdot 72=432$, а число шагов Дани – $7\cdot 72=504$.

Ответ: 1) $d_{\min}=29,6$ м; 2) Саша сделал 432 шага, Даня сделал 504 шага.

2. Перепишем уравнение в виде

$$\cos 3a\cdot\sin x+(\sin 3a-\sin 7a)\cos x=0.$$

Случай 1. $\cos 3a\neq 0,\ \sin 3a-\sin 7a\neq 0.$ Имеем однородное тригонометрическое уравнение, которое, как известно, приводится к виду

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin 7a-\sin 3a}{\cos 3a}.$$

Его решения задаются формулой

$$x_n=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin 7a-\sin 3a}{\cos 3a}\right)+\pi n,\ n\in Z,$$

из чего следует, что среди решений нет таких, для которых разность не равна $\pi k,\ k\in Z.$

Случай 2. $\cos 3a\neq 0,\ \sin 3a-\sin 7a=0.$ Имеем уравнение

$$\cos 3a\cdot\sin x=0.$$

Его решения задаются формулой

$$x_n=\pi n,\ n\in Z,$$

из чего следует, что среди решений нет таких, для которых разность не равна $\pi k,\ k\in Z.$

Случай 3. $\cos 3a=0,\ \sin 3a-\sin 7a\neq 0.$ Имеем уравнение

$$(\sin 3a-\sin 7a)\cos x=0.$$

Его решения задаются формулой

$$x_n=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,$$

из чего следует, что среди решений нет таких, для которых разность не равна $\pi k,\ k\in Z.$

Случай 4. $\cos 3a=0,\ \sin 3a-\sin 7a=0.$ Имеем уравнение

$$0=0.$$

В этом случае любой x является решением этого уравнения. Это означает, что среди решений есть решения, для которых разность не равна $\pi k,\ k \in Z.$

Найдем $a,$ для которых $\begin{cases} \cos 3a = 0, \\ \sin 3a - \sin 7a = 0. \end{cases}$ Первое уравнение системы имеет решения

$$a = \frac{\pi(2m+1)}{6},\ m \in Z.$$

Второе уравнение системы перепишем в виде

$$-2\sin 2a \cdot \cos 5a = 0.$$

Запишем его решения

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{\pi n}{2},\ \ n \in Z; \\ a = \dfrac{\pi(2k+1)}{10},\ \ k \in Z. \end{array}\right.$$

В результате получаем совокупность двух систем

$$\begin{cases} a = \dfrac{\pi(2m+1)}{6},\ m \in Z, \\ a = \dfrac{\pi n}{2},\ \ n \in Z; \end{cases} \quad (*) \quad \text{и} \quad \begin{cases} a = \dfrac{\pi(2m+1)}{6},\ m \in Z, \\ a = \dfrac{\pi(2k+1)}{10},\ \ k \in Z. \end{cases} \quad (**)$$

Система (*) приводит к линейному уравнению в целых числах $3n - 2m = 1.$ Решая его, получаем

$$\begin{cases} n = 2t+1,\ t \in Z, \\ m = 3t+1,\ t \in Z. \end{cases}$$

Подставляя n в выражение для $a,$ находим $a = \dfrac{\pi(2t+1)}{2},\ t \in Z.$

Система (**) приводит к линейному уравнению в целых числах $5m - 3k = -1.$ Решая его, получаем

$$\begin{cases} m = 3t+1,\ t \in Z, \\ k = 5t+2,\ t \in Z. \end{cases}$$

Подставим m в выражение для a:

$$a = \frac{\pi(2m+1)}{6} = \frac{\pi(2t+1)}{2},\ t \in Z.$$

Мы получили те же решения, что и для системы (*). Следовательно, других решений не прибавилось и $a = \dfrac{\pi(2t+1)}{2},\ t \in Z.$

Ответ: $a = \dfrac{\pi(2t+1)}{2},\ t \in Z.$

3. Перепишем исходное уравнение в виде

$$16z^2 + 4xyz + (y^2 - 3) = 0$$

Это квадратное уравнение относительно z. Оно имеет решение, если $D/4 = 4x^2y^2 - 16(y^2 - 3) \geq 0.$ После преобразований получаем неравенство

$$y^2(x^2 - 4) + 12 \geq 0.$$

Если $x^2 - 4 \geq 0,$ то первое слагаемое левой части неравенства неотрицательно, и, следовательно, левая часть больше или равна 12 при любых y. Если же $x^2 - 4 < 0,$ то первое слагаемое левой части неравенства отрицательно, и, за счет выбора y, можно добиться того, чтобы левая часть неравенства стала отрицательной. Таким образом, условию задачи удовлетворяют x, для которых $x^2 - 4 \geq 0.$ Отсюда находим $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$

4. Запишем натуральное число a в канонической форме:

$$a = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – попарно различные простые числа, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – натуральные числа.

Известно, что количество натуральных делителей числа a, включая 1 и a, равно $(s_1+1)(s_2+1) \cdot \ldots \cdot (s_n+1).$ По условию задачи это число равно 101. Поскольку число 101 простое, все скобки в произведении равны 1, кроме одной, равной 101. Тогда число $a = p^{100}$, а его делители $d_1 = 1, d_2 = p, d_3 = p^2, ...,$ $d_{101} = p^{100}$.

Вычислим сумму делителей:

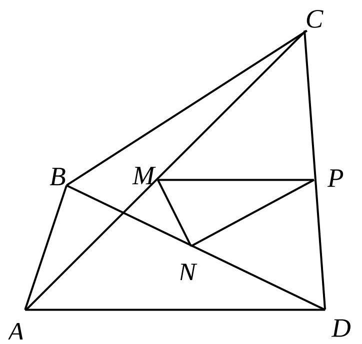
$$\Sigma_d = 1 + p + p^2 + ... + p^{100} = \frac{p^{101} - 1}{p - 1} = \frac{a\sqrt[100]{a} - 1}{\sqrt[100]{a} - 1}.$$

Вычислим произведение делителей:

$$\Pi_d = p^{1+2+...+100} = p^{50 \cdot 101} = \sqrt{a^{101}}.$$

Ответ: 1) $\Sigma_d = \dfrac{a\sqrt[100]{a} - 1}{\sqrt[100]{a} - 1}$; 2) $\Pi_d = \sqrt{a^{101}}$.

5. Обозначим середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ через M и N, соответственно (см. рисунок).



Проведем через точку M прямую, параллельную AD. Точку пересечения этой прямой со стороной CD четырехугольнике $ABCD$ обозначим через P. Так как MP является средней линией треугольника ACD, то $MP = \dfrac{AD}{2} = 2$, а $P -$ середина стороны CD. Соединим точки N и P. Отрезок NP является средней линией треугольника BCD(N и $P -$ середины сторон BD и CD, соответственно). Следовательно, $NP \parallel BC$, а $NP = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{3}$. Так как

$MP \parallel AD$, а $NP \parallel BC$, то угол между прямыми BC и AD совпадает с углом между прямыми MP и NP. Для нахождения этого угла рассмотрим треугольник MPN. Запишем теорему косинусов для этого треугольника:

$$MN^2 = MP^2 + NP^2 - 2MP \cdot NP \cdot \cos\angle MPN.$$

Подставляя $MP = 2,\ NP = \sqrt{3},\ MN = 1,$ получим

$$\cos\angle MPN = \frac{12+16-4}{16\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\angle MPN = 30^0.$ Так как $\angle MPN -$острый, то он и есть искомый угол между прямыми BC и AD.

Ответ: 30^0.

Вариант № 2

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C, делая в минуту 50 шагов, с длиной шага -50 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 250 м от пункта C. Даня идет в C по дороге B со скоростью 80 шагов в минуту, с длиной шага 40 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 300 м от C. Каждый из них, пройдя пункт C, не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

Ответ: 1) $d_{\min} = 15{,}8$ м; 2) число шагов Саши – 470, число шагов Дани -752.

2. При каких a уравнение $\sin 5a \cdot \cos x - \cos(x+4a) = 0$ имеет два решения x_1 и x_2, для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in Z$?

Ответ: $a = \dfrac{\pi(4t+1)}{2}, t \in Z.$

3. При каких x уравнение $x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2xyz - 4 = 0$ не имеет решений при любых z ?

Ответ: $|x| < 2.$

4. Натуральное число a имеет 103 различных делителей, включая 1 и a. Найти сумму и произведение таких делителей.

Ответ: $1) \Sigma_d = \dfrac{a\sqrt[102]{a} - 1}{\sqrt[102]{a} - 1}$; $2)\ \Pi_d = \sqrt{a^{103}}.$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 2 и $2\sqrt{2}$ соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 1. Найти угол между прямыми BC и AD.

Ответ: $\alpha = 45^0.$

Вариант № 3

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C, делая в минуту 40 шагов, с длиной шага -65 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 260 м от пункта C. Даня идет в C по дороге B со скоростью 75 шагов в минуту, с длиной шага 50 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 350 м от C. Каждый из них, пройдя пункт C, не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

Ответ: $1)\ d_{\min} = 18{,}1$ м; 2) число шагов Саши – 376, число шагов Дани – 705.

2. При каких a уравнение $\cos(x - a) - \sin(x + 2\alpha) = 0$ имеет два решения x_1 и x_2, для которых $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in Z$?

Ответ: $a=\dfrac{\pi(4t+1)}{6},\ t\in Z.$

3. При каких z уравнение $x^2+y^2+4z^2+2xyz-9=0$ имеет решение при любых y?

Ответ: $1\le|z|\le\dfrac{3}{2}.$

4. Натуральное число a имеет 107 различных делителей, включая 1 и a. Найти сумму и произведение таких делителей.

Ответ: 1) $\Sigma_d=\dfrac{a\sqrt[106]{a}-1}{\sqrt[106]{a}-1}$; 2) $\Pi_d=\sqrt{a^{107}}$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 6 и 8 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 5. Найти угол между прямыми BC и AD.

Ответ: $\alpha=90^0.$

Вариант № 4

1. На пересечении дорог A и B (прямые) находится населенный пункт C (точка). Саша идет по дороге A в направлении пункта C, делая в минуту 45 шагов, с длиной шага -60 см. В начале движения Саша находилась на расстоянии 290 м от пункта C. Даня идет в C по дороге B со скоростью 55 шагов в минуту, с длиной шага 65 см и в момент начала их совместного движения находился на расстоянии 310 м от C. Каждый из них, пройдя пункт C, не останавливаясь, продолжает движение по своей дороге. Фиксируем моменты времени, к которым Даня и Саша сделали каждый целое число шагов. Найти наименьшее возможное расстояние между ними (по дорогам) в такие моменты времени. Какое число шагов сделал каждый из них ко времени, когда это расстояние оказалось минимальным?

Ответ: 1) $d_{\min}=57$ м; 2) число шагов Саши -396, число шагов Дани $-$ 484.

2. При каких a уравнение $\sin(x-a)+\cos(x+3a)=0$ имеет два решения x_1 и x_2, для которых $x_1-x_2 \neq \pi k, k \in Z$?

Ответ: $a=\dfrac{\pi(4t+1)}{8}, t \in Z.$

3. При каких y уравнение $x^2+2y^2+8z^2-2xyz-9=0$ не имеет решений при любых z ?

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}<|y| \leq 2\sqrt{2}.$

4. Натуральное число a имеет 109 различных делителей, включая 1 и a. Найти сумму и произведение таких делителей.

Ответ: 1) $\Sigma_d=\dfrac{a\sqrt[108]{a}-1}{\sqrt[108]{a}-1}$; 2) $\Pi_d=\sqrt{a^{109}}.$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон BC и AD равны 4 и 6 соответственно. Расстояние между серединами диагоналей BD и AC равно 3. Найти угол между прямыми BC и AD.

Ответ: $\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}.$