Заключительный тур олимпиады «Росатом»,
10 класс, Москва, Россия, март 2020

Вариант № 1

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x) = \frac{ax-5}{x+a-2}?$$

2. Каждое из четырех чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\sin x \cdot \sin y$, $\sin x : \sin y$ над числами $\sin x$, $\sin y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

3. При каких a решение (x, y, z) системы $\begin{cases} x + 2y = a \\ 2y + 3z = a + 1 \\ x + 3z = 5 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 19$? Найти эти решения.

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2020, для которого $P(5) = 2019$, $P(6) = 2021$ и $P(4+x) = P(8-x)$ для всех x.

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45^0, 60^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответы и решения

1. Рассмотрим произвольную дробно-линейную функцию $f(x)=\dfrac{ex+b}{cx+d}, ed-bc\neq 0, c\neq 0$. Выясним при каком соотношении коэффициентов e,b,c,d она совпадает со своей обратной

$$f(f(x))=\frac{e\cdot\dfrac{ex+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ex+b}{cx+d}+d}=\frac{(e^2+bc)x+(eb+bd)}{c(e+d)x+(d^2+bc)}\equiv x,\ x\neq-\frac{d}{c}. \quad (*)$$

Если $(e+d)\neq 0$, то тождество (*) невозможно, поскольку равенство правой и левой частей (*) может быть не более, чем при двух значениях x. Если $e+d=0$, то

$$f(f(x))=\frac{\left(e^2+bc\right)x}{\left(e^2+bc\right)}\equiv x,\ \ e^2+bc\neq 0.$$

Таким образом, уравнение 1) имеет бесконечное число решений, если

$$\begin{cases} a=-(a-2),\\ a^2-5\neq 0,\\ a(a-2)+5\neq 0.\end{cases}$$

Отсюда находим $a=1$. Соответствующая функция $f(x)=\dfrac{x-5}{x-1}$.

Уравнение 2) имеет бесконечное число решений, помимо $a=1$, в случае, когда дробно-линейная ($e+d\neq 0$) функция $g(x)=f(f(x))$ совпадает со своей обратной. Согласно (*) это бывает, если

$$e^2+bc=-\left(d^2+bc\right) \quad \text{или} \quad e^2+2bc+d^2=0 \qquad (**)$$

В условиях варианта 1 соотношение (**) примет вид:

$$a^2-10+(a-2)^2=0 \quad \text{или} \quad a^2-2a-3=0.$$

Отсюда находим $a=-1$ или $a=3$. Второе условие $\left(e^2+bc\right)^2+c(eb+bd)(e+d)\neq 0$ при $a=-1$ и $a=3$ выполняется. Соответствующие этим значениям функции

$$f(x)=\frac{-x-5}{x-3},\quad f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$$

Ответ: 1) $a=1,\ \ f(x)=\dfrac{x-5}{x-1};$

2) $a=1,\ \ f(x)=\dfrac{x-5}{x-1};\ a=-1,\ ,\ f(x)=\dfrac{-x-5}{x-3};$

$a=3,\ \ f(x)=\dfrac{3x-5}{x+1}.$

2. Если число 2 является суммой $\sin x+\sin y$, то $\sin x=1,$ $\sin y=1,$ а $\sin x-\sin y=0,$ но такого числа нет среди предложенных. Аналогично, если $\sin x-\sin y=2$, то $\sin x=1,$ $\sin y=-1,$ а $\sin x+\sin y=0,$ а такого числа нет. Произведение $\sin x\cdot\sin y$ никогда не равно 2, поскольку при $\sin x=\pm1,$ $\sin y=\pm1$ имеем $\sin x-\sin y=0$, а такого числа нет среди заданных. Тогда единственной возможностью остается вариант $\sin x:\sin y=2,$ тогда $\sin x=2\sin y.$

Случай 1. $\sin x+\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Имеем $3\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Тогда $\sin y=\dfrac{1}{6},$ $\sin x=\dfrac{1}{3},$ $\sin x-\sin y=\dfrac{1}{6},$ а такого числа среди предложенных нет. Следовательно, случай 1 не реализуется.

Случай 2. $\sin x+\sin y=\dfrac{3}{2}.$ Имеем $3\sin y=\dfrac{3}{2}.$ Тогда $\sin y=\dfrac{1}{2},$ $\sin x=1,$ $\sin x-\sin y=\dfrac{1}{2},$ $\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}.$ Это означает, что случай 2 возможен. Он реализуется на парах $\left(x;y\right)$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z,\ y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

3. Выразим x из 3 уравнения

$$x = -3z + 5.$$

Подставим его в 1 уравнение

$$\begin{cases} -3z + 2y = a - 5, \\ \ \ 2y + 3z = a + 1. \end{cases}$$

Складывая 1 и 2 уравнения, получим $4y = 2a - 2$. Отсюда находим $y = \frac{a-2}{2}$. Тогда $z = \frac{a + 1 - 2y}{3} = 1$, а $x = 2$.

Подставим найденное нами решение в уравнение сферы

$$1 + \frac{(a+2)^2}{4} + 9 = 19.$$

Перепишем это уравнение в виде $(a+2)^2 = 36$. Отсюда находим $a_1 = 4$, $a_2 = -8$. При $a_1 = 4$ получаем $x = 2, y = 1, z = 1$, а при $a_2 = -8$ $x = 2,\ y = -5,\ z = 1$.

Ответ: 1) при $a = 4,\ x = 2, y = 1, z = 1;$

2) при $a = -8$ $x = 2,\ y = -5,\ z = 1.$

4. График функции $y = P(x)$ симметричен относительно прямой $x = x_0$, если $P(x_1) = P(x_2)$ для любых $x_1 < x_0 < x_2$, таких, что $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$ или $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$. В нашем случае $x_1 = 4 + x$, $x_2 = 8 - x$. Тогда $x_0 = \frac{(4+x)+(8-x)}{2} = 6$. Следовательно, график искомого многочлена, если он существует, симметричен относительно вертикальной прямой $x = 6$. Рассмотрим многочлен $\hat{P}(x) = a(x-6)^{2020} + b$. Он симметричен относительно прямой

$x=6$ и имеет степень 2020. Подберем константы a и b так, чтобы выполнялись условия задачи

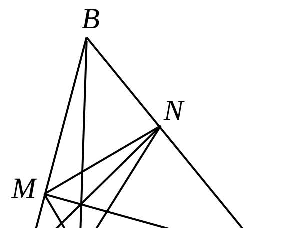
$$\begin{cases} \hat{P}(6)=b=2021, \\ \hat{P}(5)=a+b=2019. \end{cases}$$

Отсюда находим $a=-2$, $b=2021$. Подставляя эти значения, получаем искомый многочлен $P(x)=-2(x-6)^{2020}+2021.$

Ответ: существует, например, $P(x)=-2(x-6)^{2020}+2021.$

Точки M,N,P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45^0,60^0,75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

5. Пусть α,β,γ – углы треугольника ABC при вершинах A,B,C соответственно. Треугольник AMP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\alpha$. Действительно, они имеют общий угол и $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AM}{AC}=\cos\alpha.$. Аналогично, треугольники BNM и CPN подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $\cos\beta$ и $\cos\gamma,$ соответственно. Тогда



$$S_{AMP}:S_{ABC}=\cos^2\alpha, S_{BMN}:S_{ABC}=\cos^2\beta, S_{CPN}:S_{ABC}=\cos^2\gamma.$$

$$S_{MNP}=S_{ABC}-S_{AMP}-S_{BNM}-S_{CPN}=S_{ABC}\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma\right).$$

В условии варианта 1

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1+\cos150^0}{2}=\frac{5-\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

Ответ: $\left(\sqrt{3}-1\right):4.$

Вариант № 2

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x))=x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x))))=x$ имеет бесконечное число решений для функций вида

$$f(x)=\frac{(2a+8)x-5}{2x-a}\ ?$$

Ответ: 1) $a=-8,\ \ f(x)=\dfrac{-8x-5}{2x+8};$

2) $a=-8,\ \ f(x)=\dfrac{-8x-5}{2x+8};\ \ a=-2,\ \ f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+2};$

$a=-\dfrac{22}{5},\ \ f(x)=\dfrac{-4x-25}{10x+22}.$

2. Каждое из четырех чисел $-\sqrt{2};-1;-\dfrac{1}{2};0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\cos x+\cos y$, $\cos x-\cos y$, $\cos x\cdot\cos y$, $\cos x:\cos y$ над числами $\cos x$, $\cos y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $\left(x;y\right)$.

Ответ: $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z,\ y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

3. При каких a решение (x, y, z) системы $\begin{cases} 2x+3y=a-1 \\ 3y+4z=a+1 \\ x+2z=a-2 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x+1)^2+y^2+(z+2)^2=\frac{49}{9}$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a=-3, x=-3, y=\frac{2}{3}, z=-1;$

2) при $a=\frac{9}{5},\ x=-\frac{3}{5},\ y=\frac{2}{3},\ z=\frac{1}{5}.$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2019, для которого $P(2018)=2020$ и $P(2014+x)+P(2022-x)=4040$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x)=(x-2018)^{2019}+2020.$

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $30^0, 75^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(2\sqrt{3}-3\right):4.$

Вариант № 3

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x))=x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x))))=x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x)=\frac{(5-3a)x-2}{5x+a-1}\ ?$$

Ответ: 1) $a=2,\ \ f(x)=\frac{-x-2}{5x+1};$

2) $a=2,\ \ f(x)=\frac{-x-2}{5x+1};\ a=3,\ \ f(x)=\frac{-4x-2}{5x+2};$

$$a=\frac{1}{5},\quad f(x)=\frac{22x-10}{25x-4}.$$

2. Каждое из четырех чисел $-1;-1;-\frac{1}{4};0$ является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x+\cos y$, $\sin x-\cos y$, $\sin x\cdot\cos y$, $\sin x:\cos y$ над числами $\sin x$, $\cos y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x;y)$.

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z,\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

3. При каких a решение (x,y,z) системы $\begin{cases} x-2y=a-1 \\ 2z-y=a+2 \\ x+4z=a+3 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=20$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a=8, x=-1, y=-4, z=3$;

2) при $a=-8,\ x=-1,\ y=4,\ z=-1.$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2024, для которого $P(2006)=2020, P(2007)=2018$ и $P(2014+x)=P(2000-x)$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x)=2(x-2007)^{2024}+2018.$

5. Точки M,N,P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37{,}5^0, 60^0, 82{,}5^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(\sqrt{2}-1\right):4.$

Вариант № 4

1. При каких a

1) уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;

2) уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений для функции вида

$$f(x) = \frac{(a+3)x-13}{x+2a+3}?$$

Ответ: 1) $a = -2, \quad f(x) = \dfrac{x-13}{x-1};$

2) $a = -2, \quad f(x) = \dfrac{x-13}{x-1};\ a = -1, \quad f(x) = \dfrac{-x-13}{x-5};$

$a = \dfrac{1}{5}, \quad f(x) = \dfrac{17x-65}{5x+19}.$

2. Каждое из четырех чисел $-3; -1; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ является результатом одной из четырех арифметических операций $tgx + ctgy$, $tgx - ctgy$, $tgx \cdot ctgy$, $tgx : ctgy$ над числами tgx, $ctgy$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z,\ y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

3. При каких a решение (x, y, z) системы $\begin{cases} 3x - y = a - 2 \\ y + 2z = -a - 1 \\ 3x - 2z = 2a + 3 \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$? Найти эти решения.

Ответ: 1) при $a = -3, x = -1, y = 2, z = 0$;

2) при $a = -\dfrac{51}{13}, x = -\dfrac{17}{13}, y = 2, z = \dfrac{6}{13}.$

4. Найти многочлен $P(x)$ степени 2021, для которого $P(2019) = 2022$ и $P(2014 + x) + P(2024 - x) = 4044$ для всех x.

Ответ: существует, например, $P(x) = (x - 2019)^{2021} + 2022.$

5. Точки M, N, P – основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $37{,}5^0, 67{,}5^0, 75^0$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

Ответ: $\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4\right) : 8.$

Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс, СНГ, февраль 2020

Вариант № 1

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 200 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 20, Вова – 30(м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 2x+\cos 2x-1\right)\geq 2\sin x(\sin x-\cos x).$$

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 7 возросла в три раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=2$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n=\dfrac{1}{n+\dfrac{2019}{n+\dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 58^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответы и решения

1. Пусть s – путь, пройденный Петей на лодке, $T_1(s), T_2(s)$ – время окончания переправы Петей и Вовой соответственно, а $T(s)=\max\left(T_1(s),T_2(s)\right)$ – время окончания совместной переправы. Тогда

$$T_1(s)=\frac{s}{40}+\frac{200-s}{20}=10-\frac{s}{40},\quad T_2(s)=\frac{s}{30}+\frac{200-s}{40}=5+\frac{s}{120}.$$

Поскольку $T_1(s)$ монотонно убывает $\left(k_1=-\frac{1}{40}<0\right)$, $k_1<0$, а $T_2(s)$ – монотонно возрастает $\left(k_2=\frac{1}{120}>0\right)$, то минимальное значение функция $T(s)$ принимает, когда $T_1(s)=T_2(s)$:

$$10-\frac{s}{40}=5+\frac{s}{120}.$$

Отсюда находим $s=150$.

Ответ: 150 м.

2. Преобразуем правую часть уравнения

$$2\sin x(\sin x-\cos x)=2\sin^2 x-\sin 2x=1-\cos 2x-\sin 2x.$$

Обозначим $t=\sin 2x+\cos 2x-1,$.тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$\sin t\geq -t.$$

Решениями этого неравенства являются $t:t\geq 0.$ В результате приходим к неравенству

$$\sin 2x+\cos 2x\geq 1.$$

Разделим обе части полученного неравенства на $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 2x\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

и перепишем его в виде

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Его решения $-\frac{\pi}{4}+2\pi k \le 2x-\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in Z,$ откуда находим

$\pi k \le x \le \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$.

Ответ: $\pi k \le x \le \frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z$.

3. По условию задачи $НОД(p,q)=2$ и $\frac{p+7}{q+7}=\frac{3p}{q}, \quad \frac{p}{q}>0.$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$7\left(q-3p\right)=2pq.$$

Так как левая часть уравнения делится на 7, то и правая часть должна делиться на 7. Тогда хотя бы одно из p и q делится на 7.

Случай 1. $q=7k, k \in Z, k \ne 0.$.Имеем $7k-3p=2pk.$ Отсюда находим $p=\frac{7k}{2k+3}=\frac{7}{2}-\frac{21}{2\left(2k+3\right)}, k \in Z, k \ne 0.$

Число p будет ненулевым целочисленным при

$$2k+3 \in \left\{-21;-7;-3;-1;1;7;21\right\}.$$

Отсюда находим $k \in \left\{-12;-5;-3;-2;-1;2;9\right\}$. Отвечающие им значения p и $q,$ а также $НОД(p,q)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

k	-12	-5	-3	-2	-1	2	9
p	4	5	7	14	-7	2	3
q	-84	-35	-21	-14	-7	14	63
$НОД(p,q)$	4	5	7	14	7	2	3

Условию $НОД(p,q)=2$ удовлетворяет только одна дробь $\frac{2}{14}$.

Кроме того $\frac{2}{14}>0.$

Случай 2. $p = 7m, m \in Z$. Имеем $q - 21m = 2qm$. Отсюда находим $q = \dfrac{21m}{1-2m} = -\dfrac{21}{2} + \dfrac{21}{2(2m-1)}, m \in Z, m \neq 0$. Число q будет ненулевым целочисленным при

$$2m - 1 \in \{-21; -7; -3; 1; 3; 7; 21\}.$$

Отсюда находим $m \in \{-10; -3; -1; 1; 2; 4; 11\}$. Отвечающие им значения p и q, а также $НОД(p, q)$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

m	-10	-3	-1	1	2	4	11
p	-70	-21	-7	7	28	2	77
q	-10	-9	-7	-21	-14	-12	-11
$НОД(p, q)$	10	3	7	7	14	2	11

Дробь $\dfrac{2}{-12}$ удовлетворяет условию $НОД(p, q) = 2$, но она не удовлетворяет условию $\dfrac{p}{q} > 0$.

Ответ: $p = 2, q = 14$.

4. Преобразуем дробь к виду $a_n = \dfrac{n^2+1}{n(n^2+2020)}$. Найдем при каких n последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей, а при каких $n-$ убывающей. Для этого решим неравенство $a_n < a_{n+1}$:

$$\frac{n^2+1}{n(n^2+2020)} < \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)\left((n+1)^2+2020\right)}.$$

После преобразований имеем

$$n^2(n+1)^2 - 2017n(n+1) + 2021 < 0.$$

Введем новую переменную $t = n(n+1), t \in [2; +\infty)$. Получаем квадратное неравенство

$$t^2 - 2017t + 2021 < 0.$$

Перепишем его в виде

$$(t - t_1)(t - t_2) < 0,$$

где

$$t_1 = \frac{2017 - \sqrt{2017^2 - 4 \cdot 2021}}{2} \approx 1,$$

$$t_2 = \frac{2017 + \sqrt{2017^2 - 4 \cdot 2021}}{2} \approx 2016.$$

Так как $t_1 < 2,$ то неравенство справедливо при $t < t_2.$ Возвращаясь к старым переменным, получаем неравенство

$$n(n+1) < t_2.$$

Перепишем его в виде

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < t_2 + \frac{1}{4}.$$

Отсюда находим

$$n < -\frac{1}{2} + \sqrt{t_2 + \frac{1}{4}} \approx 44,4.$$

Нам осталось посчитать a_n при $n = 44$ и $n = 45$ и выбрать, при каком из этих значений a_n наибольшее. Имеем

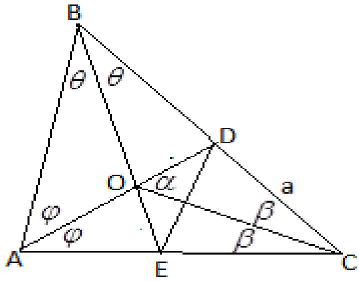
$$a_{44} = \frac{44^2 + 1}{44^3 + 2020 \cdot 44} = \frac{1937}{85184 + 88880} = \frac{1937}{174064} \approx 0,01112809,$$

$$a_{45} = \frac{45^2 + 1}{45^3 + 2020 \cdot 45} = \frac{2026}{91125 + 90900} = \frac{2026}{182025} \approx 0,01113034.$$

Таким образом, при $n = 45$ дробь a_n принимает наибольшее значение.

Ответ: $n = 45$.

5. Введем обозначения: $\measuredangle ABC = 2\theta$, $\measuredangle BCA = 2\beta$, $\measuredangle CAB = 2\varphi$. По теореме о сумме углов треугольника BOA получаем



$$\measuredangle BOA = 180^\circ - \theta - \varphi = 180^\circ - \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ + \beta.$$

По условию четырехугольник $EODC$ вписанный, следовательно,

$$\measuredangle DOE = 180^\circ - 2\beta.$$

Из условия $\measuredangle BOA = \measuredangle DOE$ (вертикальные углы) получаем уравнение

$$90^\circ + \beta = 180^\circ - 2\beta.$$

Отсюда находим $\beta = 30^\circ$. Следовательно, $\measuredangle BCA = 2\beta = 60^0$.

В треугольнике ODC $\measuredangle DOC = 58^\circ$ по условию, $\measuredangle DCO = \beta = 30^\circ$, так как $OC -$ биссектриса угла $\measuredangle BCA$. Тогда

$$\measuredangle ODC = 180° - \measuredangle DOC - \measuredangle DCO = 180° - 58^\circ - 30° = 92^\circ.$$

Найдем $\measuredangle DAC$ треугольника DAC

$\measuredangle DAC = \varphi = 180° - \measuredangle ODC - \measuredangle DCA = 180° - 92^\circ - 60° = 28^\circ$.

Следовательно, $\measuredangle CAB = 2\varphi = 56°$. Осталось найти $\measuredangle ABC$:

$$\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle CAB - \measuredangle BCA = 180^\circ - 56^\circ - 60^0 = 64^\circ.$$

Ответ: 56^0, 64^0, 60^0.

Вариант № 2

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 100 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 30 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 10, Вова – 20 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 80 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\right)\le 2\cos x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)\,.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k\le x\le \dfrac{4\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\dfrac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 5 возросла в два раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=3$.

Ответ: $p=3, q=15$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n=\dfrac{1}{n+\dfrac{400}{n+\dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n=20$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O . Угол DOC равен 72^0 . Найти углы треугольника ABC , если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 84^0, 36^0, 60^0.

Вариант № 3

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 340 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 15, Вова – 25 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 250 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sin 4x+\cos 4x+1\right)+2\cos 2x(\sin 2x+\cos 2x)>0 .$$

Ответ: $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 4 возросла в четыре раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q)=5$.

Ответ: $p=-20, q=-5$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n=\cfrac{1}{n+\cfrac{900}{n+\cfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n=30$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 64^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 68^0, 52^0, 60^0.

Вариант № 4

1. Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 160 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 32 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова – вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 16, Вова – 24 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (время перехода в лодку и течение реки не учитывать).

Ответ: 120 м.

2. Решить неравенство:

$$\sin\left(\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x + 1\right) + 2\sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x) < 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi k}{2}, k \in Z$.

3. Сократимая, обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 6 уменьшилась в два раза. Найти p и q, если известно, что $НОД(p,q) = 4$.

Ответ: $p = -8, q = -12$.

4. При каком натуральном n дробь $a_n = \dfrac{1}{n + \dfrac{1600}{n + \dfrac{1}{n}}}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $n = 40$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 42^0. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

Ответ: 24^0, 96^0, 60^0.