Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018
7 класс

Вариант № 1

1. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет различных цветов?

2. На столе разложены 17 карточек, на каждой из которых написаны различные числа от 5 до 21. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Саше и Маше взять по 8 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Машей, на 72 больше, чем сумма чисел на карточках Саши. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

3. Возвести в квадрат числа $a = 11$, $b = 111$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 12345678787654321$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует шестизначных чисел a, для которых $P(P(a)) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 2$ уравнение $P(P(a)) = a$ не имеет решений a, в записи которых присутствуют различные цифры.

Вариант № 2

1 В мешке деда Мороза находится 34 одинаковых по форме карандашей разного цвета: 6 черных, 8 красных и 20 голубых. Вова, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько карандашей. Какое максимальное количество карандашей может взять Вова, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех карандашей каждого из цветов?

2. На столе разложены 21 карточка, на каждой из которых написаны различные числа от 7 до 27. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Коле и Оле взять по 10 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Колей, на 110 больше, чем сумма чисел на карточках Оли. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

3. Возвести в квадрат числа $a = 101,\ b = 10101$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 102030405060504030201$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует восьмизначных чисел a, для которых $P(P(P(P(a)))) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 3$ уравнение $P(P(P(P(a)))) = a$ не имеет решений a с различными цифрами.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a, b, c, для которых $НОД\left(a, b, c\right) = 5$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?

Вариант № 3

1. В мешке деда Мороза находится 45 одинаковых по форме шариков для елки разных цветов: 8 золотых, 12 серебряных, 18 красных и 7 зеленых. Катя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько шаров. Какое максимальное количество шаров может взять Катя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее двух шаров каждого из цветов?

2. На столе разложены 23 карточки, на каждой из которых написаны различные числа от 9 до 31. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Дане и Ване взять по 11 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Даней, на 132 больше, чем сумма чисел на карточках Вани. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

3. Возвести в квадрат числа $a = 1001$, $b = 1001001$. Извлечь квадратный корень из числа $c = 1002003004005004003002001$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b = \overline{a_n a_1 a_2 ... a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует шестизначных чисел a, для которых $P(P(P(a))) = a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n > 3$ уравнение $P(P(P(a))) = a$ не имеет решений a с различными цифрами.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a, b, c, для которых $НОД\left(a, b, c\right) = 6$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?

Вариант № 4

1. В мешке деда Мороза находится 28 одинаковых по форме кукол, отличающихся по цвету волос: 9 блондинок, 8 брюнеток и 11 шатенок. Маша, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько кукол. Какое максимальное количество кукол может взять Маша, чтобы быть уверенной в том, что в мешке останется не менее трех кукол, среди которых есть блондинка, брюнетка и шатенка?

2. На столе разложены 25 карточек, на каждой из которых написаны различные числа от 4 до 28. Карточки перевернули так, чтобы чисел не было видно, перемешали и предложили Кате и Свете взять по 12 карточек. Оказалось, что сумма чисел на карточках, отобранных Катей, на 156 больше, чем сумма чисел на карточках Светы. Какое число написано на карточке, оставшейся на столе?

3. Возвести в квадрат числа $a=10001,\ b=100010001$. Извлечь квадратный корень из числа $c=1000200030004000300020001$.

4. Циклической перестановкой $P(a)$ натурального числа $a=\overline{a_1a_2...a_n}$, $a_n \neq 0$ называют число $b=\overline{a_na_1a_2...a_{n-1}}$ записанное теми же цифрами, но в другом порядке: последняя цифра становится первой, а остальные сдвигаются на разряд вправо. Сколько существует девятизначных чисел a, для которых $P(P(P(P(P(P(a))))))=a$? Найти эти числа. Доказать, что при простом $n>6$ уравнение $P(P(P(P(P(P(a))))))=a$ не имеет решений a с различными цифрами.

5. Длины сторон треугольника ABC – целые числа a,b,c, для которых $НОД\left(a,b,c\right)=7$. На какое максимальное число равных треугольников можно разрезать треугольник ABC, если длины их сторон выражаются целыми числами?