

Очный отборочный тур в регионах, осень 2018
11 класс (выезд 1)

Вариант № 1

1. При каких натуральных значениях a уравнение $\text{НОД}(5|\cos 2x|, a|\sin 2x|) = 3$ имеет решения? Найти эти решения.

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\sin(x + y - z) + \cos(x + y + 2z) = a^2 - 2a + 3$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

3. Прямая с уравнением $2x + y - 5 = 0$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с целочисленными координатами. Найти координаты вершины параболы, если известно, что она пересекает ось x в точке с абсциссой $x = 1$, а числа a, b, c – целые.

4. Ученики 10^a вычисляли средние арифметические $x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n$ членов числовой последовательности $a_k = (2k + 15) / 12, k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots, 16$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n , а событие «сделать ошибку при вычислениях 16 средних» – достоверно. При вычислении x_{15} получен результат $x_{15} = 31/12$. Найти вероятность того, что при вычислении x_{14}, x_{15} и x_{16} будет хотя бы два правильных результата.

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax + 2y + 1| = b \\ ((2x - 3y + 1)(4x + y - 19)(x + 2y - 3)) = 0 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM : MA_1 = 1 : 2, BN : NB_1 = 1 : 3, CP : PC_1 = 2 : 3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P ?

Вариант № 2

1. При каких натуральных значениях a уравнение $\text{НОД}(4|\cos x|, a|\cos 3x|) = 2$ имеет решения? Найти эти решения.

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\cos(x + 2y - 2z) + \sin(y + z) + a^2 + 4a + 6 = 0$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

3. Прямая с уравнением $3x - y - 5 = 0$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с целочисленными координатами. Найти наибольшее возможное значение второго корня уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если первый корень равен -1 , а числа a, b, c – целые.

4. Ученики 10^6 вычисляли средние арифметические $x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n$ членов числовой последовательности $a_k = (2k + 3) / 6, k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots, 12$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n , а событие «сделать ошибку при вычислениях 12 средних» достоверно. При вычислении x_7 получен результат $x_7 = 9/7$. Найти вероятность того, что при вычислении x_7, x_8 и x_9 будет один правильный результат.

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax + 2y + b| = 1 \\ (x - 2y + 4)(5x - y - 7)(x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет шесть решений?

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM : MA_1 = 1 : 4, BN : NB_1 = 3 : 2, CP : PC_1 = 3 : 4$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P ?

Вариант № 3

1. При каких натуральных значениях a уравнение $\text{НОД}(6|\sin x|, a|\sin 3x|) = 2$ имеет решения? Найти эти решения.

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\sin(x - 2y + 2z) + \sin(2x + 2y + z) = |a + 3| + 2$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

3. Прямая с уравнением $4x + y - 7 = 0$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с целочисленными координатами. Найти координаты точки касания, если парабола пересекает ось x в точке с абсциссой $x = 2$, а числа a, b, c – целые.

4. Ученики 10^6 вычисляли средние арифметические $x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n$ членов числовой последовательности $a_k = (3k + 5) / 15, k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots, 10$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n , а событие «допустить ошибку при вычислениях 10 средних» – достоверно. При вычислении x_6 получен результат $x_6 = 43/18$. Найти вероятность того, что при вычислении x_6, x_7 и x_8 будет два правильных результата.

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax + by + 2| = 1 \\ (3x - 5y - 2)(5x + y - 22)(x + 3y + 4) = 0 \end{cases}$$

имеет пять решений?

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM : MA_1 = 2 : 5, BN : NB_1 = 1 : 3, CP : PC_1 = 4 : 3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P ?

Вариант № 4

1. При каких натуральных значениях a уравнение $\text{НОД}(4|\cos x|, a|\cos 2x|) = 2$ имеет решения? Найти эти решения.

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения

$$\sin(x + y + 2z) + \cos(x - 3y + z) + |a - 2| + 2 = 0.$$

Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

3. Прямая с уравнением $5x - y + 6 = 0$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с целочисленными координатами. Найти наименьшее возможное значение ординаты точки касания, если парабола пересекает ось x в точке с абсциссой $x = -2$, а числа a, b, c – целые.

4. Ученики 10^c вычисляли средние арифметические $x_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n$ членов числовой последовательности $a_k = (4k - 3) / 5, k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots, 13$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n , а событие «допустить ошибку при вычислениях 13 средних» – достоверно. При вычислении x_{11} получен результат $x_{11} = 21/5$. Найти вероятность того, что при вычислении x_{10}, x_{11} и x_{12} будет два правильных результата.

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax - 2y + b| = 3 \\ (3x - 4y - 1)(4x - y - 10)(x + 5y + 6) = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM : MA_1 = 2, BN : NB_1 = 2 : 5, CP : PC_1 = 2 : 3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P ?