

Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018
11 класс

Вариант № 1

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОД(x, y) = 8$, а $НОД(\log_2 x, \log_6 y) = 3$. Найти эти числа.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$ – решений уравнения $|\cos(x + y + z)| + |\cos(y + z)| = 2 + |\cos z|$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + (y + \pi/2)^2 + (z - \pi/2)^2 \leq 4\pi^2$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(x + y)^2 = 49(3x + 5y)$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(\pi - 2) : (3\pi + 2)$.

5. При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} (x - 1 - 2\cos a)^2 + (y - 2 - 2\sin a)^2 = 3 \\ (x - 1)(y - 2) = 0 \end{cases}$$
 имеет четыре решения?

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ в отношении $CN:NA=2$. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как 1:3. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M . Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Вариант № 2

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОД(x, y) = 16$, а $НОК(\log_8 x, \log_{12} y) = 18$. Найти эти числа.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$ – решений уравнения $|\sin(x + 2y + z)| + |\sin(y + z)| = 2 + |\cos z|$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 + (z - \pi/2)^2 \leq 9\pi^2$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(x - y)^2 = 25(2x - 3y)$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(4\pi - 3\sqrt{3}) : (8\pi + 3\sqrt{3})$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x + 2 + 2\sqrt{2} \cos a)^2 + (y - 1 - 2\sqrt{2} \sin a)^2 = 2 \\ (x - y + 3)(x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет три решения?

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ в отношении $CN : NA = 3$. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как 1:2. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M . Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Вариант № 3

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОК(x, y) = 3^6 \cdot 2^8$, а $НОД(\log_3 x, \log_{12} y) = 2$. Найти эти числа.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$ – решений уравнения $|\sin(x + y + 2z)| + |\cos(y - z)| = 2 + |\sin z|$, удовлетворяющих неравенству $(x - \pi/2)^2 + y^2 + z^2 \leq 5\pi^2$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(x + 2y)^2 = 9(x + y)$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(2\pi - 3\sqrt{3}) : (10\pi + 3\sqrt{3})$.

5. При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} (x - 2 - \sqrt{5} \cos a)^2 + (y + 1 - \sqrt{5} \sin a)^2 = \frac{5}{4} \\ (x - 2)(x - y - 3) = 0 \end{cases}$$
 имеет два решения?

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ в отношении $CN : NA = 4$. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как $2 : 3$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M . Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Вариант № 4

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $\text{НОК}(x, y) = 5^4 \cdot 2^6$, а $\text{НОК}(\log_{10} x, \log_{40} y) = 4$. Найти эти числа.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$ – решений уравнения $|\cos(x - y + z)| + |\sin(y + z)| = 2 + |\sin z|$, удовлетворяющих неравенству $(x - \pi/2)^2 + (y - \pi/2)^2 + z^2 \leq 3\pi^2$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(2x + 3y)^2 = 16(x - y)$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(5\pi - 3) : (7\pi + 3)$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2 - 3\cos a)^2 + (y + 2 - 3\sin a)^2 = 1 \\ (y + 2)(x + y) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ пополам. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как $1:4$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M . Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?