Олимпиада имени профессора И.В. Савельева,осень2018
9 класс

Вариант № 1

1. На день рождения Пети был куплен торт с основанием в форме квадрата 3×3 дм, разделенного на 9 равных кусков с квадратными основаниями 1×1 дм. Петя решил разрезать торт ножом по прямой так, чтобы образовалось наибольшее количество отдельных кусочков, не обязательно равных. Какое максимальное число кусков торта можно получить с помощью одного прямолинейного разреза? Какое наименьшее число прямолинейных разрезов можно сделать, чтобы каждый из 9 первоначальных кусков оказался разрезанным?

2. Найти целые a, при которых оба корня уравнения $(x-a-2)^2+x-a-8=0$ принадлежат отрезку $[1;6]$.

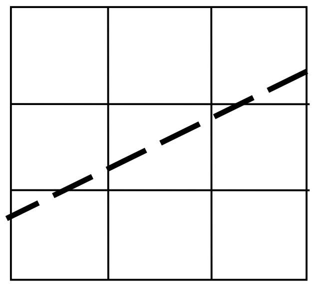
3. Сколько существует различных троек $(x;y;z)$ целых чисел, для которых $xy^2z^3=36000$?

4. Решить уравнение:

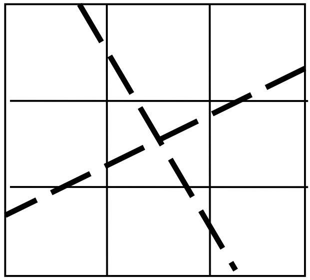
$$\left(x^2-4x\right)^{2019}+\left(x^2-4x\right)^{2018}\cdot\left(x+2\right)+\left(x^2-4x\right)^{2017}\cdot\left(x+2\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(x+2\right)^{2019}=0.$$

5. Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении $MC:AM=1:3$. Прямая, проходящая через точку M, делит квадрат на две части, площади которых относятся как $1:2$. В каком отношении эта прямая делит периметр квадрата?

Ответы и решения



1. На рисунке изображен торт в виде прямоугольника со сторонами 3х3. И изображена прямая (разрез), пересекающая максимальное число квадратов, этих квадратов 5. Максимальное число кусков торта после первого разреза равно 2·5+4=14. Таким образом, чтобы разрезать все 9 квадратов достаточно двух прямых.



Ответ: 14 кусков и 2 разреза.

2. Сделаем замену переменных $t = x - a - 2$. Тогда квадратное уравнение $(x-a-2)^2 + (x-a-2) - 6 = 0$, запишем в виде $t^2 + t - 6 = 0$, где его решение $t = 2, t = -3$. Возвращаясь к старой переменной $x = a + 4$, $x = a - -1$, при любых значениях a данные корни различны. Корень $x = a - 1$, если $1 \le a - 1 \le 6$, $2 \le a \le 7$. Другой корень $x = a + 4$, если $1 \le a + 4 \le 6$, $-3 \le a \le 2$. Пересечением двух данных отрезков является $a = 2$.

Ответ: 2.

3. Будем рассматривать сначала только натуральные числа, удовлетворяющие данному уравнению $x \cdot y^2 \cdot z^3 = 36000$. Запишем число $36000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ в виде степеней простых чисел. У данного числа нет простых делителей, кроме чисел 2, 3 и 5, в силу единственности разложения на простые множители $\begin{cases} x = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c, \\ y = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w, \\ z = 2^k \cdot 3^n \cdot 5^m \end{cases}$ поэтому $y^2 = 2^{2u} \cdot 3^{2v} \cdot 5^{2w}$ и $z^3 = 2^{3k} \cdot 3^{3n} \cdot 5^{3m}$, и возможны следующие варианты: $\begin{cases} a + 2u + 3k = 5, \\ b + 2v + 3n = 2, \\ c + 2w + 3m = 3. \end{cases}$

Уравнения системы независимы и каждое можно решать в отдельности, запишем решение каждого в виде таблицы:

$a + 2u + 3k = 5$

$a = 0$	$2u + 3k = 5$	$u = 1$	$k = 1$
$a = 1$	$1 + 2u + 3k = 5$	$u = 2$	$k = 0$
$a = 2$	$2 + 2u + 3k = 5$	$u = 0$	$k = 1$
$a = 3$	$3 + 2u + 3k = 5$	$u = 1$	$k = 0$
$a = 4$	$4 + 2u + 3k = 5$	решения нет	
$a = 5$	$5 + 2u + 3k = 5$	$u = 0$	$k = 0$

Всего получили 5 решений.

$b + 2v + 3n = 2$

$b = 0$	$0 + 2v + 3n = 2$	$v = 1$	$n = 0$
$b = 1$	$1 + 2v + 3n = 2$	решения нет	
$b = 2$	$2 + 2v + 3n = 2$	$v = 0$	$n = 0$

Всего получили 2 решения.

$c + 2w + 3m = 3$

$c = 0$	$0 + 2w + 3m = 3$	$w = 0$	$m = 1$
$c = 1$	$1 + 2w + 3m = 3$	$w = 1$	$m = 0$
$c = 2$	$2 + 2w + 3m = 3$	решения нет	
$c = 3$	$3 + 2w + 3m = 3$	$w = 0$	$m = 0$

Всего получили 3 решения.

Общее число положительных решений $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Отрицательное решение получим либо если у переменных x, z поставить знак минус одновременно, либо изменением знака y – всего четыре комбинации знаков. Поэтому общее число решений $30 \cdot 4 = 120$.

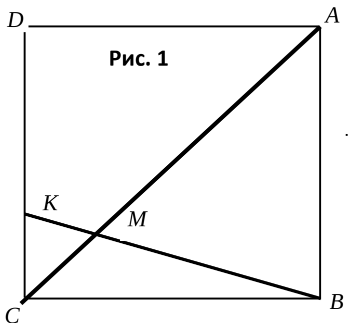
Ответ: 120.

4. Введем новые переменные $a = x^2 - 4x$ и $b = x + 2$. Получим $a^{2019} + a^{2018} \cdot b + a^{2017} \cdot b^2 + \cdots + b^{2019} = 0$.

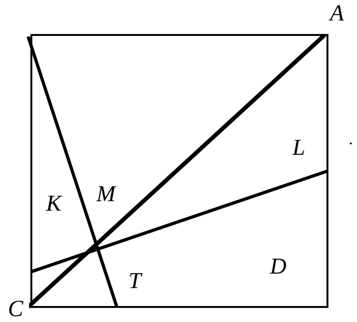
Если $b = 0$, то и $a = 0$, но значений x, удовлетворяющих таким условиям, нет.

Если $b \neq 0$, то разделим все уравнение на $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{2019} + \left(\frac{a}{b}\right)^{2018} + \left(\frac{a}{b}\right)^{2017} + \cdots + 1 = 0$, заметив, что это сумма геометрической прогрессии, запишем её сумму в виде: $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{2020} - 1}{\frac{a}{b} - 1} = 0$, значит $a \neq b$. Тогда из формулы получим выражение $a = -b$, где равенство выполняется только, если $x + 2 = -x^2 + 4x$. Откуда получим решение $x = 1$, $x = 2$.

*Ответ:*1;2.



5. По условию задачи возможно несколько расположений прямой в зависимости от начальной и конечной точки прямой KL. В данном решении



рассмотрим лишь первый случай (Рисунок 1), другие случаи предлагается рассмотреть самостоятельно.

Обозначим сторону квадрата за единицу. Рассмотрим подобные треугольники ΔKCM и ΔAML. Пусть $KC = x\ (0 \leq x \leq 1), AL = 3x$. $\frac{S_{ABKL}}{S_{LKC}} = \frac{2}{1} \ = \frac{(1-x+1)\cdot 1}{x}$. Значит $KC = \frac{2}{3}$, тогда искомое отношение периметров ищем из части периметра ΔKCL (рассматриваем ту часть периметра треугольника, что является также частью периметра квадрата) $\text{Р}_{KC+CL} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. И периметра квадрата, равного 4. Отношение равно $\frac{\frac{5}{3}}{4-\frac{5}{3}} = \frac{5}{7}$.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

Вариант № 2

1. На день рождения Васи был куплен торт с основанием в форме квадрата 4×4 дм, разделенного на 16 равных кусков с квадратными основаниями 1×1 дм. Вася решил разрезать торт ножом по прямой так, чтобы образовалось наибольшее количество отдельных кусочков, не обязательно равных. Какое максимальное число кусков торта можно получить с помощью одного прямолинейного разреза? Какое наименьшее число прямолинейных разрезов можно сделать, чтобы каждый из 16 первоначальных кусков оказался разрезанным?

Ответ: 23 куска и 3 разреза.

2. Найти целые a, при которых уравнение $(x-2a+1)^2 - 2x + 4a - 10 = 0$ не имеет решений на отрезке $[-1;7]$.

Ответ: $(-\infty;-3] \cup [6;+\infty)$.

3. Сколько существует различных троек $(x;y;z)$ целых чисел, для которых $xy^2z^4=12096$?

Ответ: 48.

4. Решить уравнение (знаки $\pm$ чередуются)

$$\left(x^2+4x\right)^{2015}-\left(x^2+4x\right)^{2014}\cdot(x-2)+\left(x^2+4x\right)^{2013}\cdot(x-2)^2-\ldots-$$
$$-(x-2)^{2015}=0.$$

Ответ: -1;-2.

5. Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении $MC:AM=1:4$. Прямая, проходящая через точку M, делит квадрат на две части, площади которых относятся как $1:11$. В каком отношении эта прямая делит периметр квадрата?

Ответ: $\frac{5}{19}$.

Вариант № 3

1. На день рождения Кости был куплен торт с основанием в форме прямоугольника 3×5 дм, разделенного на 15 равных кусков с квадратными основаниями 1×1 дм. Костя решил разрезать торт ножом по прямой так, чтобы образовалось наибольшее количество отдельных кусочков, не обязательно равных. Какое максимальное число кусков торта можно получить с помощью одного прямолинейного разреза? Какое наименьшее число прямолинейных разрезов можно сделать, чтобы каждый из 15 первоначальных кусков оказался разрезанным?

Ответ: 22 куска и 3 разреза.

2. Найти целые a, при которых уравнение $(x-a-4)^2+2x-2a-16=0$ имеет только один корень на отрезке $[1;8]$.

Ответ: $[-5;0]\cup[3;8]$.

3. Сколько существует различных троек $(x; y; z)$ целых чисел, для которых $x^2 y^3 z^3 = 3240000$?

Ответ: 16.

4. Решить уравнение

$$\left(x^2 - 2x\right)^{2017} + \left(x^2 - 2x\right)^{2016} \cdot (3 - 2x) + \left(x^2 - 2x\right)^{2015} \cdot (3 - 2x)^2 + \ldots + $$
$$+ (3 - 2x)^{2017} = 0.$$

Ответ: 1;3.

5. Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении $AM : MC = 3 : 2$. Прямая, проходящая через точку M, делит квадрат на две части, площади которых относятся как $9 : 11$. В каком отношении эта прямая делит периметр квадрата?

Ответ: $\frac{19}{21}$.

Вариант № 4

1. На день рождения Маши был куплен торт с основанием в форме прямоугольника 2×5 дм, разделенного на 10 равных кусков с квадратными основаниями 1×1 дм. Маша решила разрезать торт ножом по прямой так, чтобы образовалось наибольшее количество отдельных кусочков, не обязательно равных. Какое максимальное число кусков торта можно получить с помощью одного прямолинейного разреза? Какое наименьшее число прямолинейных разрезов можно сделать, чтобы каждый из 10 первоначальных кусков оказался разрезанным?

Ответ: 16 кусков и 2 разреза.

2. Найти целые a, при которых хотя бы один корень уравнения $(x - 2a + 3)^2 + 2x - 4a - 9 = 0$ принадлежат отрезку $[-2; 6]$.

Ответ: $[-1; 7]$.

3. Сколько существует различных троек $(x; y; z)$ целых чисел, для которых $xy^2z^5 = 540000$?

Ответ: 96.

4. Решить уравнение (знаки $\pm$ чередуются)

$$\left(x^2+2x\right)^{2021}-\left(x^2+2x\right)^{2020}\cdot(2x+1)+\left(x^2+2x\right)^{2019}\cdot(2x+1)^2-\ldots-$$
$$-(2x+1)^{2021}=0.$$

Ответ: ± 1.

5. Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении $AM : MC = 2:1$. Прямая, проходящая через точку M, делит квадрат на две части, площади которых относятся как $9:31$. В каком отношении эта прямая делит периметр квадрата?

Ответ: $\frac{27}{53}$.