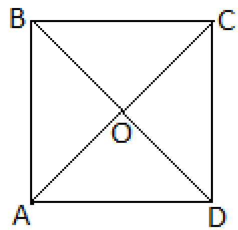
Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \dfrac{17+35\sqrt{2}}{2} \approx 33{,}2$ сек

Решение. Пусть a – длина стороны квадрата, v – скорость лисы, $1{,}2v$ – скорость собаки, $\dfrac{a}{v}=6$



Независимо от положений собаки и лисы в начале охоты, собака на первом этапе погони должна побежать в точку O – центр квадрата. Для этого потребуется время $t_1 \le \dfrac{a/2+a/\sqrt{2}}{1{,}2v}=\dfrac{5(1+\sqrt{2})}{2}$.

Если в момент появления собаки в точке O, лиса ей не видна (она находится на сторонах квадрата), собака должна остановиться в точке O и дождаться момента, когда лиса появится в одной из вершин квадрата. Время ожидания $t_2 \le \dfrac{a}{v}=6$. Если в момент прихода собаки в точку O она видит лису (лиса находится на диагоналях квадрата), то расстояние между ними не превосходит $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и время ожидания $t_2=0$.

В обоих случаях, в момент времени, когда собака увидела лису, расстояние между ними не может быть более длины половины диагонали, т.е. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. На третьем этапе собака должна бежать в направлении лисы. Она догонит ее за время $t_3 \le \dfrac{a}{\sqrt{2}(1,2v-v)} = 15\sqrt{2}$. Таким образом, общее время погони $t \le t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{5(1+\sqrt{2})}{2} + 6 + 15\sqrt{2} = \dfrac{17+35\sqrt{2}}{2} \approx 33,2$ сек

Задача 2 Ответ: $a = 30$

Решение. Имеем $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, где p_1, p_2, p_3 – простые числа. Сумма всех его делителей $1, p_1, p_2, p_3, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_3, p_2 \cdot p_3, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ равна $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1) = 72$.

Пусть для определенности $2 \le p_1 < p_2 < p_3$.

Случай 1. $p_1 = 2$

$(p_2+1)(p_3+1) = 24$

$p_2 = 3 \to p_3 = 5 \to a = 30$

Случай 2. $p_1 = 3$

$(p_2+1)(p_3+1) = 18 \to p_2, p_3 \in \varnothing$, так как левая часть равенства делится на 4 .

Случай 3. $p_1 \ge 5$

$(p_2+1)(p_3+1) \le 12 \to p_2, p_3 \in \varnothing$, так как $p_2 + 1 \ge 8,\ p_3 + 1 \ge 12$.

Задача 3 Ответ: $y = -6x^2 + 11x - 5$

Решение. Условия задачи:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4(a+1)+2(b+1)+c+1=0 \\ 9(a+2)+3(b+2)+c+2=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-7 \\ 9a+3b+c=-26 \end{cases} \to \begin{cases} c=-a-b \\ 3a+b=-7 \\ 8a+2b=-26 \end{cases} \to \begin{cases} c=-a-b \\ 3a+b=-7 \\ 4a+b=-13 \end{cases} \to \begin{cases} a=-6 \\ b=11 \\ c=-5 \end{cases}$$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×3; 2) 1433 плиток.

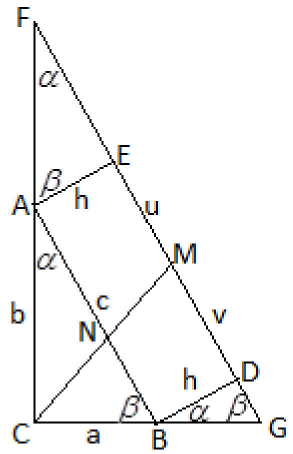
Решение. Пусть a и b, $a < b < 2a$ – размеры плитки. Из условия того, что плитка не резалась, следует, что число $a \cdot b$ является делителем чисел $m = 70 \times 66 = 4620 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ и $n = 102 \times 39 = 3978 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17$, а каждое из a и b являются общими делителями m и n. Тогда каждое из чисел a и b делят $НОД(m,n) = 6$. Возможны варианты: 1) $a=1, b=2$; 2) $a=1, b=3$; 3) $a=1, b=6$; 4) $a=2, b=3$. Условиям задачи удовлетворяет только вариант $a=2, b=3$. Количество плиток равно $\dfrac{(n+m)}{6} = 1433$.

Задача 5 Ответ: $17:18$

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b, $a < b$ является стороной расположенного во вне прямоугольника $ABDE$, вторая сторона которого равна h. Биссектриса прямого угла пересекает сторону DE в точке M. В каком отношении точка M делит отрезок DE ?

Ответ: $\left(ac + h(b-a)\right) : \left(bc - h(b-a)\right)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2},\ h < \dfrac{bc}{b-a}$

Решение. Введем обозначения: $EM = u,\ DM = v$



Из подобия $\triangle FEA$ и $\triangle ABC$ имеем: $EF:h=b:a \to EF=\dfrac{bh}{a}$

Из подобия $\triangle BDG$ и $\triangle ABC$ имеем: $DG:h=a:b \to DG=\dfrac{ah}{b}$

Из подобия $\triangle CFG$ и $\triangle ABC$ имеем $CF:CG=b:a$.
По свойству биссектрисы $MF:MG=CF:CG=b:a$ и

$$\frac{u+EF}{v+DG}=\frac{b}{a} \to \frac{u+\frac{bh}{a}}{v+\frac{ah}{b}}=\frac{b}{a} \to \begin{cases} ua-bv=h(a-b) \\ u+v=c \end{cases} \to \begin{cases} u(a+b)=bc-h(b-a) \\ v(a+b)=ac+h(b-a) \end{cases}$$

Разделив одно на другое, получим ответ $u:v=\left(bc-h(b-a)\right):\left(ac+h(b-a)\right)$.
Условием принадлежности точки M стороне DE прямоугольника является выполнение неравенства $FM>FE$ или $h<\dfrac{bc}{b-a}$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \dfrac{408}{7} \approx 58,2$ сек

Задача 2 Ответ: $a=186;\ 231$

Решение. Имеем $(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)=384$

Введем обозначения: $p_1=2m_1-1,\ \ p_2=2m_2-1,\ \ p_3=2m_3-1 \to\ \ m_1\cdot m_2\cdot m_3=48$

Случай 1. $m_1=2$

$m_2=3 \to m_3=8 \to p_3=15 \to \varnothing$

$m_2=4 \to p_2=7 \to m_3=6 \to p_3=11 \to a=3\cdot 7\cdot 11=231$

$m_2 \ge 6 \to m_3 \ge 7 \to m_2\cdot m_3 \ge 42 \to \varnothing$

Случай 2. $m_1 \ge 3$

$m_2\cdot m_3 \le 16\ \ \to \varnothing$ так как $m_2 \ge 4,\ m_3 \ge 5$

Задача 3 Ответ: $y=4x^2+9x+5$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×5; 2) 881 плитка.

Задача 5 Ответ: $72:149$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t \le \dfrac{10200+151\sqrt{3}}{101} \approx 103,6$ сек

Задача 2 Ответ: $a=182;\ 195$

Задача 3 Ответ: $y=\dfrac{7}{3}x^2-x-\dfrac{22}{3}$

Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 3×4; 2) 349 плиток.
Задача 5 Ответ: $243:532$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) существует; 2) $t\le136$ сек
Задача 2 Ответ: $a=273$
Задача 3 Ответ: $y=9x^2+31x+26$
Задача 4 Ответ: 1) размер плитки 2×9; 2) 361 плитка.
Задача 5 Ответ: $157:234$