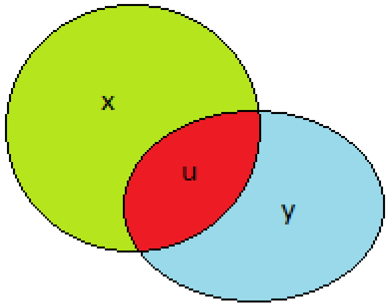
Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: в $\frac{14}{9}$ раза

Решение. На схеме зеленым цветом отмечены брюнеты, не имеющие голубых глаз. Их количество обозначено буквой x. Красным цветом отмечены брюнеты с голубым цветом глаз. Их число u. Голубым цветом отмечены владельцы голубых глаз, не являющихся брюнетами. Их число y.



Условие задачи:

$$\begin{cases} \frac{u}{x+u} = \frac{1}{15} \\ \frac{u}{y+u} = \frac{1}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14u \\ y = 9u \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{14}{9}$$

Задача 2 Ответ: $s = 2039180 - 6 = 2039174$

Решение. Докажем, что этим свойством обладают все числа от 5 до 2019, исключая 6. То, что числа $n = 2,3,4,6$ нельзя представить в виде суммы взаимно простых чисел больших 1 – проверяется.

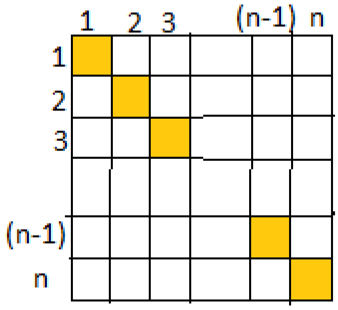
Если $n=2k+1$ нечетное, то $n=2+(2n-1)$, слагаемые взаимно простые и утверждение доказано. Пусть $n=2k$ – четное, $k>3$ и $q_1,q_2,...q_m$ – простые делители числа k. Тогда существует нечетное число $p \neq q_1,q_2,...q_m$, $p<k$ взаимно простое с k, а значит и с $n=2k$, для которого числа p и $2k-p$ взаимно простые: $НОД(p,2k-p)=НОД(p,2k)=1$, в сумме дающие n.Таким образом, в задаче требуется найти сумму всех чисел от 5 до 2019, исключая 6.

$$5+6+7+...+2019=\frac{5+2019}{2}\cdot 2015=2039180$$

$s=2039180-6=2039174$

Задача 3 Ответ: 9 дворов

Решение. На рис изображен бланк турнира, число участников которого n



Количество m участвующих пар равно числу клеток, лежащих выше отмеченной диагонали.

$$m=1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Общее число k игр, сыгранных в турнире, согласно правилам, равно

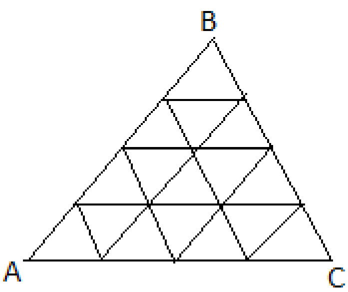
$$k=\frac{5n(n-1)}{2}=180 \rightarrow n(n-1)=72 \rightarrow n=9$$

Задача 4 Ответ: $n-m=36$

Решение. Пусть k – количество чисел отрезка натурального ряда $1 \leftrightarrow 2019$, делящихся на 56 $k=\left[\frac{2019}{56}\right]=36$. Числа p и q выражают количество чисел из $1 \leftrightarrow 2019$ кратных 7 и 8 : соответственно, $p=\left[\frac{2019}{7}\right]=288$, $q=\left[\frac{2019}{8}\right]=252$. Тогда $n=p-k=252$, $m=q-k=216$ и $n-m=36$.

Задача 5 Ответ: $n_{\max}=49$

Решение. В равных треугольниках разбиения соответствующие углы и стороны одинаковые. Объединение двух соседних треугольников разбиения образуют параллелограмм со сторонами параллельными сторонам заданного треугольника. С учетом этого, стороны каждого треугольника разбиения параллельны сторонам исходного треугольника, а их углы равны углам исходного треугольника. Таким образом, каждый из треугольников разбиения подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия k.



$m=4$

На рис изображен способ разбиения треугольника ABC на равные треугольники. Разделим сторону, например AC, на m равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AB. Точки пересечения этих прямых со стороной BC разобьют ее на m равных отрезков. Через полученные точки проведем прямые, параллельные AC. Последние прямые пересекут сторону AB в точках, делящих AB на m равных частей. Остается только провести через них прямые, параллельные стороне BC. Полученное семейство прямых разбивает треугольник ABC на подобные ему с коэффициентом $k=\dfrac{1}{m}$ и равные между собой треугольники. Общее число таких треугольников $n=m^2$. По условию, хотя бы одна из сторон треугольников разбиения имеет длину, выражаемую целым числом. Тогда, в силу простоты чисел $3, 5, 7$, число m может принимать только три значения $m=3, 5$ и 7. Наибольшее значение $n=7^2=49$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: в $1{,}5$ раза

Задача 2 Ответ: $s=1642557$ (сумма чисел отрезка натурального ряда 7, 8,…,1812)

Задача 3 Ответ: 7 мастеров

Задача 4 Ответ: $n+m=539$

Задача 5 Ответ: $n_{\min}=4$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: в $\dfrac{5}{3}$ раза

Задача 2 Ответ: $s=771887$ (сумма чисел отрезка натурального 5,…1242 без шестерки)

Задача 3 Ответ: 16 команд

Задача 4 Ответ: $n=230,\ m=161$

Задача 5 Ответ: $n_{\max}=144$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: в 2 раза

Задача 2 Ответ: $s=1732570$ (это сумма чисел отрезка натурального ряда 7, 8,…,1861)

Задача 3 Ответ: 14 команд

Задача 4 Ответ: $НОД(n,m)=64$

Задача 5 Ответ: $n_{\min}=9$