Очный отборочный тур в регионах,осень 2018
11 класс (выезд 1)

Вариант № 1

1. При каких натуральных значениях a уравнение $НОД\left(5\left|\cos 2x\right|, a\left|\sin 2x\right|\right)=3$ имеет решения? Найти эти решения.

2. Координаты $(x;y;z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\sin(x+y-z)+\cos(x+y+2z)=a^2-2a+3$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

3. Прямая с уравнением $2x+y-5=0$ касается параболы $y=ax^2+bx+c$ в точке с целочисленными координатами. Найти координаты вершины параболы, если известно, что она пересекает ось x в точке с абсциссой $x=1$, а числа a,b,c – целые.

4. Ученики 10^a вычисляли средние арифметические $x_n=\left(a_1+a_2+...+a_n\right)/n$ членов числовой последовательности $a_k=\left(2k+15\right)/12, k=1,2,...,n, n=1,2,...,16$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n, а событие «сделать ошибку при вычислениях 16 средних» - достоверно. При вычислении x_{15} получен результат $x_{15}=31/12$. Найти вероятность того, что при вычислении x_{14}, x_{15} и x_{16} будет хотя бы два правильных результата.

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} \left|ax+2y+1\right|=b \\ \left(2x-3y+1\right)\left(4x+y-19\right)\left(x+2y-3\right)=0 \end{cases}$$

имеет четыре решения?

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM:MA_1=1:2, BN:NB_1=1:3, CP:PC_1=2:3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P?

Ответы и решения

1. $5|\cos 2x|$ из натуральных значений может принимать только значения 1,2,3,4,5. Так как

$$\text{НОД}(5|\cos 2x|, a|\sin 2x|) = 3,$$

то $5|\cos 2x| = 3,$ т.е.

$$|\cos 2x| = 3/5 \;\Rightarrow\; |\sin 2x| = 4/5 \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{2},\; n \in Z.$$

Для параметра a получаем уравнение

$$\text{НОД}(3, 4a/5) = 3,$$

равносильное тому, что a кратно 15.

Ответ: $\begin{cases} a = 15k, k \in N; \\ x = \pm\arccos\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases}$

2. Так как $a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2,$ то при $a \neq 1$ величина $a^2 - 2a + 3 > 2$ и уравнение не имеет решений, поэтому искомый радиус $R = \infty.$ При $a = 1$ уравнение равносильно системе

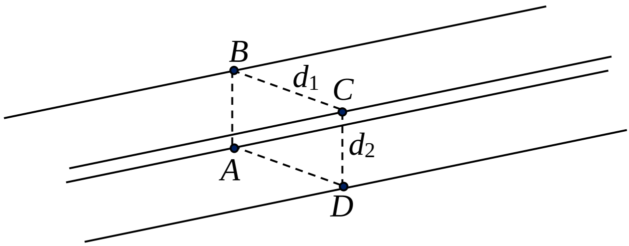
$$\begin{cases} \sin(x + y - z) = 1 \\ \cos(x + y - 2z) = 1 \end{cases}$$

Решая систему, получаем

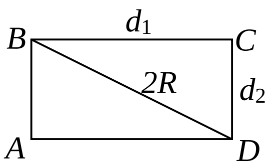
$$\begin{cases} x + y - z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\; n \in Z \\ x + y + 2z = 2\pi k,\; k \in Z \end{cases}$$

Первое уравнение определяет семейство плоскостей с нормальным вектором $\{1;1;-1\}$ и расстоянием между плоскостями, равным $d_1 = 2\pi/\sqrt{3}.$ Второе уравнение задает семейство плоскостей с нормальным вектором $\{1;1;2\}$ и расстоянием между плоскостями, равным $d_2 = 2\pi/\sqrt{6}.$ Так как скалярное прозведение векторов

$\{1;1;-1\}$ и $\{1;1;2\}$ равно нулю, то плоскости из разных семейств взаимно перпендикулярны. Таким образом решение рассматриваемой системы представлено пересечениями этих плоскостей. Эти пересечения образуют семейство прямых параллельных рассматриваемым плоскостям. При пересечении этих прямых плоскостью, перпендикулярной им, получим сетку из точек, лежащих в вершинах прямоугольников со сторонами d_1 и d_2:



Круг, описанный около прямоугольника (на рисунке это *ABCD*), имеет радиус, равный максимальному радиусу шара, внутрь которого не попадают прямые из нашего семейства. Они касаются поверхности шара:



Используя теорему Пифагора для треугольника *BCD* получаем, что искомый радиус

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{3} + \frac{4\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\begin{cases} R=\infty, & a\neq 1 \\ R=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, & a=1 \end{cases}.$

3. Так как парабола пересекает ось абсцисс при $x=1$, то значение функции $y=ax^2+bx+c$ в этой точке равно нулю, т.е.

$$a+b+c=0.$$

Уравнение заданной прямой можно записать в виде

$$y=5-2x.$$

Условие касания этой прямой с параболой в точке $(x;y)$ состоит в равенстве значений функций и производных:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=5-2x \\ 2ax+b=-2 \end{cases}$$

Это дает следующую систему уравнений

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=5-2x \\ 2ax+b=-2 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Из двух последних уравнений находим

$$b=-2-2ax,\ c=-a-b=-a+2+2ax.$$

Подставляя это в первое уравнение, получаем

$$a(x^2-2x+1)=-3,\ a(x-1)^2=-3.$$

По условию задачи величины a и x должны быть целыми. Это возможно только в двух случаях: x=0 или x=2. Решая систему, находим два варианта

$$x=0 \ \Rightarrow\ a=-3,\ b=-2,\ c=5$$

$$x=2 \ \Rightarrow\ a=-3,\ b=10,\ c=-7$$

В первом случае координаты вершины параболы

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{3},\ y_в=ax_в^2+bx_в+c=\frac{16}{3},$$

А во втором

$$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{3},\ y_в = ax_в^2 + bx_в + c = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{5};\frac{16}{3}\right),\ \left(\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right).$

4. Пусть вероятность допустить ошибку при вычислении x_n равна p_n. Вероятность того, что при вычислении x_n не было ошибки
равна $1 - p_n$. Вероятность того, что все вычисления проделаны без ошибок равна

$$(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_{16}),$$

А вероятность того, что ошибка сделана равна

$$1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-p_{16}).$$

По условию задачи данная вероятность равна 1. Это может быть только тогда, когда одна из вероятностей p_n равна 1. С другой стороны, по условию задачи

$$p_n = np_1.$$

Поэтому единице может быть равна только p_{16}. Это означает, что

$$p_1 = \frac{1}{16},\ p_2 = \frac{2}{16},\ p_3 = \frac{3}{16},\ \dots,\ p_{15} = \frac{15}{16},\ p_{16} = 1.$$

Вычислим x_{15}, суммируя 15 членов арифметической прогрессии с первым членом 19 и последним членом 45, находим

$$x_{15} = \frac{1}{15}\left(\frac{17}{12} + \frac{19}{12} + \dots + \frac{45}{12}\right) = \frac{1}{15\cdot 12}\left(17+19+\dots+45\right) =$$

$$= \frac{(17+45)\cdot 15}{15\cdot 12\cdot 2} = \frac{62\cdot 15}{15\cdot 12\cdot 2} = \frac{31}{12}.$$

Отсюда следует что при вычислении x_{15} ошибки не было. Поэтому при вычислении x_{15}, x_{15}, x_{15} будут хотя бы два правильных результата тогда и только тогда, когда безошибочно одно из вычислений x_{14} или x_{16}. Вероятносто того, что ошибочны оба вычисления равна

$$p_{14}p_{16}=\frac{14}{16}\cdot 1=\frac{7}{8}.$$

Соответственно искомая вероятность равна

$$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

5. Первое уравнение системы определяет при b≠0 пару параллельных прямых и при b=0 одну прямую. Второе уравнение определяет три прямых в общем положении. Их точки пересечения имеют координаты (4;3), (1:1) и (5:−1). Четыре решения у системы возможны в следующих двух случаях:

1) Первое уравнение определяет пару параллельных прямых (т.е. b≠0). Эти прямые параллельны одной из прямых второго уравнения системы и не проходят через их точки пересечения.

2) Первое уравнение определяет пару параллельных прямых (т.е. b≠0), которые не параллельны ни одной прямой из второго уравнения системы и каждая из этих параллельных прямых проходит через одну из точек пересечения прямых из второго уравнения.

Рассмотрим первый случай. Параллельность прямых проверяем равенством их угловых коэффициентов. Условие параллельности прямой $2x$-$3y$+1=0 имеет вид

$$-\frac{a}{2}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ a=-\frac{4}{3}.$$

Этот случай не подходит, т.к значение *a* должно быть целым. Условие параллельности прямой $4x$+y-19=0:

$$-\frac{a}{2}=-4\ \Rightarrow\ a=8.$$

Значение b находим из условия прохождения через точки пересечения:

$$b=|8x+2y+1|.$$

Для точки (1;1) получаем b=11, для точки (4;3) величина b=39 и для точки (5;−1) значение b также равно 39. Условие параллельности прямой x+2y−3=0:

$$-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a=1.$$

Прохождение через точки пересечения определяет величину параметра

$$b=|x+2y+1|.$$

Для точки (1;1) получаем b=4, для точки (4;3) величина b=11 и для точки (5;−1) значение b равно 4. Это заканчивает рассмотрение первого случая.

Рассмотрим второй случай. С учетом предыдущего пункта условие непараллельности имеет вид

$$a\neq 8,\; a\neq 1.$$

Прохождение через точки пересечения определяет параметр b. Для пары точек (1;1) и (4;3) получаем

$$b=|a+3|=|4a+7|,$$

$$\left[\begin{array}{l} a+3=4a+7 \\ a+3=-4a-7 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=-4/3 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

Подходит только целое значение a=−2, для которого b=1. Для пары точек (1;1) и (5;−1) имеем уравнение

$$b=|a+3|=|5a-1|,$$

$$\left[\begin{array}{l} a+3=5a-1 \\ a+3=1-5a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1/3 \end{array}\right.$$

Здесь оба значения не подходят. Наконец для пары точек (4;3) и (5;−1) получаем уравнение

$$b = |4a+7| = |5a-1|,$$

$$\left[\begin{array}{l} 4a+7=5a-1 \\ 4a+7=1-5a \end{array}\right.$$

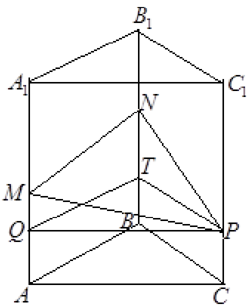
$$\left[\begin{array}{l} a=8 \\ a=-2/3 \end{array}\right.$$

Здесь также не подходит ни одно из значений.

Объединяя все рассмотенные случаи получаем окончательный ответ

$$\textit{Ответ:}\ \left[\begin{array}{l} a=8,\ b\in N,\ b\neq 11,\ b\neq 39 \\ a=1,\ b\in N,\ b\neq 4,\ b\neq 11 \\ a=-2,\ b=1 \end{array}\right.$$

6. Нарисуем чертёж согласно условиям задачи.



Обозначим заданные в задаче отношения следующим образом $AM:MA_1=\lambda_1, BN:NB_1=\lambda_2, CP:PC_1=\lambda_3$. Пусть a – сторона основания призмы, b – ее боковое ребро. Без ограничения общности, полагаем, что $\lambda_3\le\lambda_1\le\lambda_2$. Тогда $PC\le MA\le NB$ и

$$PC=\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}b,\ MA=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}b,\ NB=\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}b.$$

Площадь основания пирамиды $PMQTN$ равна

$$S_{QMNT} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} - \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right)b + \left(\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} - \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right)b\right)a =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} - \frac{2\lambda_3}{1+\lambda_3}\right),$$

а ее объем

$$V_{PQMNT} = \frac{\sqrt{3}a^2 b}{12}\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} - \frac{2\lambda_3}{1+\lambda_3}\right).$$

Объем призмы $ABCQTP$ равен $V_{ABCQTP} = \dfrac{\sqrt{3}a^2 b\lambda_3}{4(1+\lambda_3)}$. Объем многогранника $ABCMNP$ равен

$$V_{ABCMNP} = V_{PQMNT} + V_{ABCQTP} = \frac{\sqrt{3}a^2 b}{12}\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right)$$

Объем многогранника $A_1B_1C_1MNP$ равен

$$V_{A_1B_1C_1MNP} = V_{ABCA_1B_1C_1} - V_{ABCMNP} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2 b}{4} - \frac{\sqrt{3}a^2 b}{12}\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2 b}{12}\left(\frac{1}{1+\lambda_1} + \frac{1}{1+\lambda_2} + \frac{1}{1+\lambda_3}\right)$$

Тогда $V_{A_1B_1C_1MNP} : V_{ABCMNP} = \alpha : \beta$, где

$$\alpha = \left(\frac{1}{1+\lambda_1} + \frac{1}{1+\lambda_2} + \frac{1}{1+\lambda_3}\right), \beta = \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right)$$

В данном варианте

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{3},\ \lambda_3 = \frac{2}{3} \ \Rightarrow\ V_{A_1B_1C_1MNP} : V_{ABCMNP} = 59:121.$$

Ответ: 59:121

Вариант № 2

1. При каких натуральных значениях a уравнение $НОД\left(4\left|\cos x\right|, a\left|\cos 3x\right|\right)=2$ имеет решения? Найти эти решения.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=4n-2,\ n\in N;\ x=\dfrac{\pi k}{3},\ k\in Z \\ a=4n,\ n\in N;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$

2. Координаты $(x;y;z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\cos(x+2y-2z)+\sin(y+z)+a^2+4a+6=0$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{22}}{6}$

3. Прямая с уравнением $3x-y-5=0$ касается параболы $y=ax^2+bx+c$ в точке с целочисленными координатами. Найти наибольшее возможное значение второго корня уравнения $ax^2+bx+c=0$, если первый корень равен -1, а числа a,b,c – целые.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$

4. Ученики $10^{б}$ вычисляли средние арифметические $x_n=\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)/n$ членов числовой последовательности $a_k=\left(2k+3\right)/6, k=1,2,\ldots,n, n=1,2,\ldots,12$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n, а событие «сделать ошибку при вычислениях 12 средних» достоверно. При вычислении x_7 получен результат $x_7=9/7$. Найти вероятность того, что при вычислении x_7, x_8 и x_9 будет один правильный результат.

Ответ: $\frac{5}{12}$

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax+2y+b|=1 \\ (x-2y+4)(5x-y-7)(x+y+1)=0 \end{cases}$$

имеет шесть решений?

Ответ: $\begin{cases} a \neq 1;\ a \neq -10;\ a \neq 2; \\ b \neq -2a-5;\ b \neq -2a-7;\ b \neq 2a-1; \\ b \neq 2a-3;\ b \neq 5-a;\ b \neq 3-a \end{cases}$

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM : MA_1 = 1:4,\ BN : NB_1 = 3:2,\ CP : PC_1 = 3:4$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P?

Ответ: 62:43

Вариант № 3

1. При каких натуральных значениях a уравнение $НОД\left(6|\sin x|, a|\sin 3x|\right) = 2$ имеет решения? Найти эти решения.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 6n \pm 2,\ n \in N;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \\ a = 54n,\ n \in N;\ x = \pm \arcsin \frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z \\ a = 27(2n-1),\ n \in N;\ x = \pm \arcsin \frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z \end{array} \right.$

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения $\sin(x-2y+2z) + \sin(2x+2y+z) = |a+3| + 2$. Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$

3. Прямая с уравнением $4x+y-7=0$ касается параболы $y=ax^2+bx+c$ в точке с целочисленными координатами. Найти координаты точки касания, если парабола пересекает ось x в точке с абсциссой $x=2$, а числа a,b,c – целые.

Ответ: (3;–5), (1;3)

4. Ученики $10^{в}$ вычисляли средние арифметические $x_n=\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)/n$ членов числовой последовательности $a_k=\left(3k+5\right)/15, k=1,2,\ldots,n,\ n=1,2,\ldots,10$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n, а событие «допустить ошибку при вычислениях 10 средних» – достоверно. При вычислении x_6 получен результат $x_6=43/18$. Найти вероятность того, что при вычислении x_6, x_7 и x_8 будет два правильных результата.

Ответ: $\dfrac{3}{50}$

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax+by+2|=1 \\ \left(3x-5y-2\right)\left(5x+y-22\right)\left(x+3y+4\right)=0 \end{cases}$$

имеет пять решений?

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=1-b,\ b\in Z,\ b\neq 1 \\ a=3-b,\ b\in Z,\ b\neq 2 \\ a=3n+1,\ b=5n+2,\ n\in Z,\ n\neq 0 \\ a=3n,\ b=5n+1,\ n\in Z,\ n\neq 0 \end{array}\right.$

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении

$AM : MA_1 = 2:5,\ BN : NB_1 = 1:3,\ CP : PC_1 = 4:3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P?

Ответ: 53:31

Вариант № 4

1. При каких натуральных значениях a уравнение $НОД\left(4|\cos x|, a|\cos 2x|\right) = 2$ имеет решения? Найти эти решения.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 4n-2,\ n \in N;\ x = \pi k,\ k \in Z \\ a = 4n,\ n \in N;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$

2. Координаты $(x; y; z)$ точек M в пространстве являются решениями уравнения

$$\sin(x + y + 2z) + \cos(x - 3y + z) + |a - 2| + 2 = 0 .$$

Найти максимальный радиус шара в пространстве, не содержащего внутри себя такие точки.

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{1122}}{66}$

3. Прямая с уравнением $5x - y + 6 = 0$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке с целочисленными координатами. Найти наименьшее возможное значение ординаты точки касания, если парабола пересекает ось x в точке с абсциссой $x = -2$, а числа a, b, c – целые.

Ответ: -14

4. Ученики $10^{г}$ вычисляли средние арифметические $x_n = \left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)/n$ членов числовой последовательности $a_k = \left(4k - 3\right)/5, k = 1, 2, ..., n,\ n = 1, 2, ..., 13$. Вероятность допустить ошибку при вычислении x_n пропорциональна n, а событие «допустить ошибку при вычислениях 13 средних» – достоверно. При вычислении x_{11} получен результат $x_{11} = 21/5$. Найти вероятность того, что при вычислении x_{10}, x_{11} и x_{12} будет два правильных результата.

Ответ: $\dfrac{46}{169}$

5. При каких целых a и b система уравнений

$$\begin{cases} |ax-2y+b|=3 \\ (3x-4y-1)(4x-y-10)(x+5y+6)=0 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

Ответ: $a=8,\ b=-17;\ \ a=8;\ b=-23.$

6. Точки M, N и P лежат на боковых ребрах правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и делят их в отношении $AM:MA_1=2,\ BN:NB_1=2:5,\ CP:PC_1=2:3$. В каком отношении делит объем призмы плоскость, проходящая через точки M, N и P?

Ответ: 173:142.