Олимпиада имени профессора И.В. Савельева,осень 2018
11 класс

Вариант № 1

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОД(x, y) = 8$, а $НОД(\log_2 x, \log_6 y) = 3$. Найти эти числа.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$– решений уравнения $|\cos(x+y+z)| + |\cos(y+z)| = 2 + |\cos z|$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + (y+\pi/2)^2 + (z-\pi/2)^2 \le 4\pi^2$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(x+y)^2 = 49(3x+5y)$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(\pi - 2):(3\pi + 2)$.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (x-1-2\cos a)^2 + (y-2-2\sin a)^2 = 3 \\ (x-1)(y-2) = 0 \end{cases}$ имеет четыре решения?

6. Точка *N* делит диагональ *AC* трапеции *ABCD* в отношении *CN:NA=2.* Длины оснований *BC* и *AD* трапеции относятся как 1:3. Через точку *N* и вершину *D* проведена прямая, пересекающая боковую сторону *AB* в точке *M* . Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника *MBCN?*

Ответы и решения

1. Обозначим $\log_2 x = m \in Z, m > 0,\ \log_6 y = n \in Z, n > 0.$ Тогда $x = 2^m,\ y = 6^n.$ В результате имеем

$$НОД(x, y) = НОД(2^m, 6^n) = НОД(2^m, 2^n \cdot 3^n) = 8 = 2^3.$$

Случай 1. $m \geq n.$ Тогда $n = 3,$ $y = 6^3 = 216,$ $НОД(\log_2 x, 3) = 3.$ Отсюда находим $\log_2 x = 3k, k \in$ или $x = 8^k, k \in Z.$

Случай 2. $m < n.$ Тогда $m = 3, x = 2^3 = 8, НОД(3, \log_6 y) = 3.$ Отсюда получаем $\log_6 y = 3s, s \in Z, s > 0$ или $y = 216^s, s \in Z, s > 0.$

Ответ: 1) $x = 8^k, k = 1, 2, \ldots;\ y = 216$;

2) $x = 8,\ y = 216^s, s = 1, 2, \ldots$

2. Тройка чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет уравнению, если

$$\begin{cases} |\cos(x + y + z)| = 1, \\ |\cos(y + z)| = 1, \\ \cos z = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему. Имеем

$$\begin{cases} x + y + z = \pi n, \\ y + z = \pi m, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \qquad n, m, k \in Z.$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} x = \pi(n-m), \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi(m-k), \ \ n, m, k \in Z. \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases}$$

Введем обозначения: $\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = y + \dfrac{\pi}{2},\ \tilde{z} = z - \dfrac{\pi}{2}$. Количество различных троек $\left(\tilde{x}; \tilde{y}; \tilde{z}\right)$, удовлетворяющих неравенству $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \le 4\pi^2$ равно числу искомых троек $(x; y; z)$. Имеем

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = \pi^2\left((n-m)^2 + (m-k)^2 + k^2\right).$$

В результате неравенство принимает вид:

$$(n-m)^2 + (m-k)^2 + k^2 \le 4. \qquad (*)$$

Нужно найти число троек целых чисел $\left(n; m; k\right)$, удовлетворяющих этому неравенству. Еще раз введем обозначения:

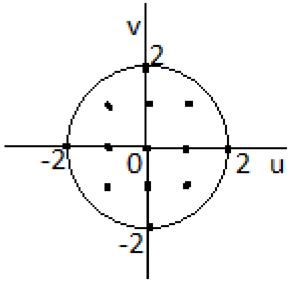
$$\tilde{n} = n - m,\ \tilde{m} = m - k,\ \tilde{k} = k.$$

Тогда неравенство (*) примет вид

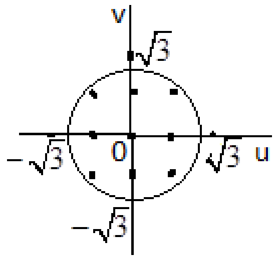
$$\tilde{n}^2 + \tilde{m}^2 + \tilde{k}^2 \le 4.$$

Последнее неравенство задает шар с центром в нуле радиуса 2. Количество различных троек целых чисел $(\tilde{n}, \tilde{m}, \tilde{k})$, удовлетворяющих этому неравенству равно количеству искомых решений уравнения.

Сечение шара $u^2 + v^2 + w^2 \le 4$ плоскостью $w = 0$ является круг $u^2 + v^2 \le 4$. Этот круг содержит 13 точек с целочисленными координатами:



Сечение шара $u^2+v^2+w^2\le 4$ плоскостью $w=1$ является круг $u^2+v^2\le 3$. Этот круг содержащит 9 точек с целочисленными координатами:



Сечение шара плоскостью $w=2$ содержит только одну точку $(0;0;2)$ с целочисленными координатами.

С учетом симметрии шара относительно плоскости $w=0$ общее число троек $(\tilde{n};\tilde{m};\tilde{k})$, удовлетворяющих неравенству $\tilde{n}^2+\tilde{m}^2+\tilde{k}^2\le 4$ равно $N=13+2\cdot 9+2\cdot 1=33$.

Ответ: 33 решения.

3. Так как правая часть уравнения $(x+y)^2=49(3x+5y)$ делится на 49, то $x+y=7k$. Подставляя это в уравнение, получаем $49k^2=49(3x+5y)$ или $3x+5y=k^2$. Решая систему

$$\begin{cases}3x+5y=k^2,\\ x+y=7k,\end{cases}$$

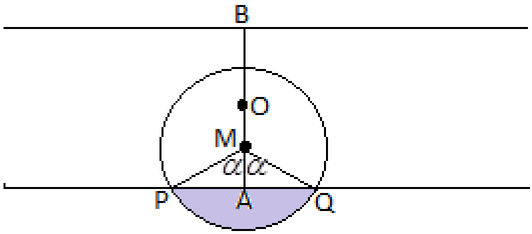
находим

$$\begin{cases} x = \dfrac{k(35-k)}{2}, \\ y = \dfrac{k(k-21)}{2}, \end{cases} k \in Z.$$

Из полученных решений надо отобрать те, у которых x и y являются целыми числами. В силу того, что числа k и $35-k$ и k и $k-21$ имеют разную четность, то при любых целых k числители обеих дробей являются четными, и, следовательно, сами дроби являются целыми числами.

Ответ: : $\begin{cases} x = \dfrac{k(35-k)}{2}, \\ y = \dfrac{k(k-21)}{2}, \end{cases} k \in Z.$

4. Каждому опыту бросания круга соответствует точка M − положение центра круга на вертикальном отрезке $[A;B]$ длины 1.



Введём обозначения: R − радиус круга, O − середина отрезка $[A;B]$, $OM = x \in [0;0,5]$ – случайная величина, равномерно распределенная на этом отрезке, α − угол, указанный на рисунке, $AM = h = \dfrac{\cos\alpha}{2}$.

Площадь кругового сегмента S_1 круга радиуса R задается формулой:

$$S_1 = \left| \alpha R^2 - \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha \right|$$

В нашем случае $R = \dfrac{1}{2}$, следовательно,

$$S_1 = \frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{8}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} S_1 : S_2 = (\pi - 2):(3\pi + 2), \\ S_1 + S_2 = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

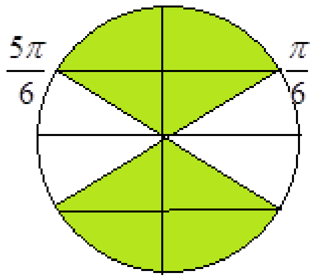
Тогда $S_1 = k(\pi - 2)$, а $S_2 = k(3\pi + 2)$. Подставляя это во второе равенство получим: $S_1 + S_2 = k \cdot 4\pi = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $k = \frac{1}{16}$. Тогда, $S_1 = \frac{\alpha}{4} - \frac{sin2\alpha}{8} = \frac{1}{16}(\pi - 2)$. Откуда находим $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, условия задачи соответствуют центральному углу PMQ равному $\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $h = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и благоприятному исходу опыта соответствуют точки M , удаленные от точки O на расстояние не более, чем $\dfrac{1}{2} - h = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Так как вероятность искомого события равна отношению длины отрезка «благоприятных» исходов, т.е. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ к длине отрезка $[A;B]$, т.е. к единице, то искомая вероятность $P(A) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$

Ответ: $P(A) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29.$

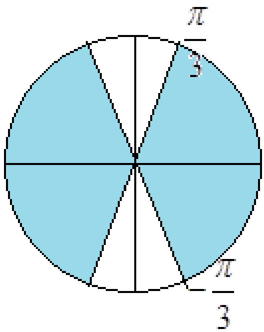
5. Решениями второго уравнения системы являются $x = 1$ и $y = 2$.

Случай 1. $x = 1$. Подставляем в первое уравнение системы $x = 1$, получим:

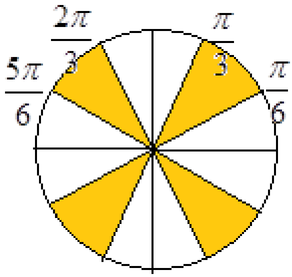
$$4cos^2a + (y - 2 - 2sina)^2 = 3$$
или
$$(y-2)^2 - 2sina(y-2) + 1 = 0.$$
Это квадратное уравнение относительно $(y-2)$. Оно имеет два решения, если его дискриминант положительный:
$$D/_4 = 4sin^2a - 1 > 0 \quad \text{или} \quad |\mathrm{sin}a| > 1/_2.$$
На тригонометрическом круге отмечены значения a, при которых окружность (первое уравнение системы) пересекает прямую $x=1$.



Случай 2. $y=2$. Подставляем в первое уравнение системы $y=2$, получим:
$$(x - 1 - 2cosa)^2 + 4sin^2a = 3$$
или
$$(x-1)^2 - 4cosa(x-1) + 1 = 0.$$
Полученное квадратное уравнение относительно $(x-1)$ имеет два решения, если его дискриминант положительный, то есть
$$\frac{D}{4} = 4cos^2a - 1 > 0 \quad \text{или} \quad |\mathrm{cos}a| > 1/_2.$$
На тригонометрическом круге отмечены значения a, при которых окружность (первое уравнение системы) пересекает прямую $y=2$.



На пересечении отмеченных в случаях 1 и 2 множеств окружность пересекает обе прямые, а система имеет четыре решения:

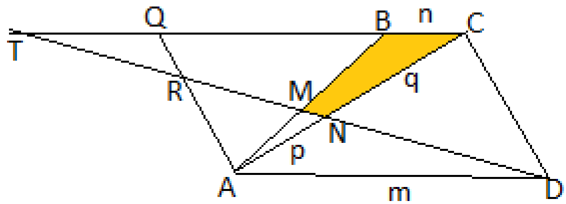


Искомые значения a объединяются в серию

$$a \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z.$$

Ответ: $a \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z.$

6. Введём обозначения: S – площадь трапеции, S_1 – площадь треугольника ABC, S_2 – площадь треугольника ACD, h – высота трапеции, $\gamma = \frac{q}{p}$, $\mu = \frac{n}{m}$.



Имеем $S_1 : S_2 = \dfrac{n}{m}$ так, как у этих треугольников одинаковая высота. Следовательно, $S_1 = \frac{n}{n+m} \cdot S$. Из подобия треугольников AND и CNT следует, что $\frac{TC}{AD} = \frac{q}{p}$. Из этого равенства получим: $TC = \frac{q}{p} AD$. Тогда $TB = TC - BC = \frac{q}{p} AD - \frac{n}{m} AD = \left(\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right) AD$. Из подобия треугольников AMD и BTM следует

$$BM:AM = TB:AD = \left(\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right).$$

Поэтому

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AM+MB} = \frac{1}{1+BM:AM} = \frac{1}{1+{}^{q}/_{p}-{}^{n}/_{m}} .$$

Тогда

$$S_{AMN} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{p}{p+q} \cdot S_1 = \frac{1}{1+\frac{q}{p}-\frac{n}{m}} \cdot \frac{1}{1+\frac{q}{p}} \cdot S_1 = \frac{1}{1+\gamma-\mu} \cdot \frac{1}{1+\gamma} \cdot S_1$$

Отсюда получим

$$S_{MBCN} = S_1 - S_{AMN} = \left(1 - \frac{1}{1+\gamma-\mu} \cdot \frac{1}{1+\gamma}\right) S_1 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+\gamma-\mu} \cdot \frac{1}{1+\gamma}\right) \frac{\mu}{1+\mu} S.$$

В нашей задаче $\gamma = 2$, $\mu = \frac{1}{3}$ поэтому $S_{MBCN} : S = 7:32.$

Ответ: $S_{MBCN} : S = 7:32.$

Вариант № 2

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОД(x, y) = 16$, а $НОК(\log_8 x, \log_{12} y) = 18$. Найти эти числа.

Ответ: $x = 8^9, y = 144; x = 8^{18}, y = 144$.

2. Найти количество различных троек чисел $(x; y; z)$– решений уравнения $\left|\sin(x + 2y + z)\right| + \left|\sin(y + z)\right| = 2 + \left|\cos z\right|$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 + (z - \pi / 2)^2 \le 9\pi^2$.

Ответ: 123 решения.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(x - y)^2 = 25(2x - 3y)$.

Ответ: $\begin{cases} x = m(15 - m), \\ y = m(10 - m), \end{cases}$ $m \in Z$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) : \left(8\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} \left(x + 2 + 2\sqrt{2}\cos a\right)^2 + \left(y - 1 - 2\sqrt{2}\sin a\right)^2 = 2 \\ (x - y + 3)(x + y + 1) = 0 \end{cases}$ имеет три решения?

Ответ: $a_1=\dfrac{7\pi}{12}+\pi k, a_2=\dfrac{11\pi}{12}+\pi k, k\in Z.$

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ в отношении $CN:NA=3$. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как $1:2$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M. Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Ответ: $S_{MBCN}:S=13:42.$

Вариант № 3

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОК(x,y)=3^6\cdot 2^8$, а $НОД(\log_3 x,\log_{12} y)=2$. Найти эти числа.

Ответ: $x=3^6=729$, $y=12^4=20736$.

2. Найти количество различных троек чисел $(x;y;z)$– решений уравнения $|\sin(x+y+2z)|+|\cos(y-z)|=2+|\sin z|$, удовлетворяющих неравенству $(x-\pi/2)^2+y^2+z^2\le 5\pi^2$.

Ответ: 57 решений.

3. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $(x+2y)^2=9(x+y)$.

Ответ: $\begin{cases} x=m(2m-3), \\ y=m(3-m), \end{cases}$ $m\in Z.$

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $\left(2\pi-3\sqrt{3}\right):\left(10\pi+3\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $P(A)=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}13.$

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases}\left(x-2-\sqrt{5}\cos a\right)^2+\left(y+1-\sqrt{5}\sin a\right)^2=\dfrac{5}{4}\\ (x-2)(x-y-3)=0\end{cases}$ имеет два решения?

Ответ: $a\in\left(\dfrac{\pi}{12}+\pi k;\dfrac{\pi}{3}+\pi k\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{12}+\pi k;\dfrac{2\pi}{3}+\pi k\right),k\in Z.$

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ в отношении $CN:NA=4$. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как $2:3$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M. Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Ответ: $S_{MBCN}:S=124:325.$

Вариант № 4

1. Натуральные числа x и y таковы, что их $НОК(x,y)=5^4\cdot 2^6$, а $НОК(\log_{10}x,\log_{40}y)=4$. Найти эти числа.

Ответ: $x=10^4, y=40^2.$

2. Найти количество различных троек чисел $(x;y;z)$– решений уравнения $\left|\cos(x-y+z)\right|+\left|\sin(y+z)\right|=2+\left|\sin z\right|$, удовлетворяющих неравенству $(x-\pi/2)^2+(y-\pi/2)^2+z^2\le 3\pi^2$.

Ответ: 27 решений.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $(2x+3y)^2 = 16(x-y)$.

Ответ: 1) $\begin{cases} x = m(15m \pm 4), \\ y = m(-10m \pm 4) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = (5m+2)(3m+2) \\ y = -2m(5m+2), m \in Z \end{cases}$.

4. На плоскости нарисовано бесконечное число параллельных прямых, отстоящих друг от друга на расстояние 1. На плоскость случайно брошен круг с диаметром 1. Найти вероятность того, что прямая, пересекающая круг, делит его на части, отношение площадей которых (меньшей к большей) не превосходит числа $(5\pi - 3):(7\pi + 3)$.

Ответ: $P(A) = \dfrac{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \approx 0,74$

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} (x-2-3\cos a)^2 + (y+2-3\sin a)^2 = 1 \\ (y+2)(x+y) = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a_1 = \pm \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k, a_2 = -\dfrac{\pi}{4} \pm \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k, k \in Z.$

6. Точка N делит диагональ AC трапеции $ABCD$ пополам. Длины оснований BC и AD трапеции относятся как $1:4$. Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M. Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

Ответ: $S_{MBCN} : S = 1:7.$