Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) 2 шага; 2) 9 движений вперед и 10 движений назад

Решение. Имеем

$$390 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13,\ \ 510 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 17,\ \ 692 = 30\cdot 23 + 2$$

Совершая маневры «вперед – назад», робот может переместится на расстояние кратное 30 шагам. Действительно, если он совершил $x \ge 0$ движений «вперед» и $y \ge 0$ – «назад», то прошел путь

$$s = 590x - 390y,\ x, y \in N\ .$$

Правая часть равенства делится на 30, поэтому $s = 30k,\ k \in Z$.

Это означает, что ближе, чем на 2 шага к объекту подойти нельзя. Уравнение

$$590x - 390y = 30\cdot 23\ ,\ x, y \in N \to 17x - 13y = 23$$

имеет решения

$$\begin{cases} x = 9 + 13t, \\ y = 10 + 17t,\ t = 0,1,2,.. \end{cases}.$$

Условию $x + y \le 20$ удовлетворяет единственное решение $x = 9$ и $y = 10$, которое обеспечивает остановку робота на расстоянии 2 шага от объекта.

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при $a = 1$; 2) $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10}\left(4n + 2m + 1\right) \\ y = \dfrac{\pi}{5}\left(2m - n + 1\right), n, m \in Z \end{cases}$;

3) $R_{\min} = \dfrac{\pi}{\sqrt{10}}$.

Решение. Имеем

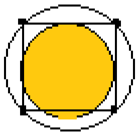
$$\frac{2a}{a^2+1} - 1 = -\frac{(a-1)^2}{a^2+1} \le 0 \text{ для всех } a \in R.$$

Если знак неравенства строгий, то решений уравнение не имеет. Решение может быть только при $a = 1$. В этом случае уравнение равносильно системе

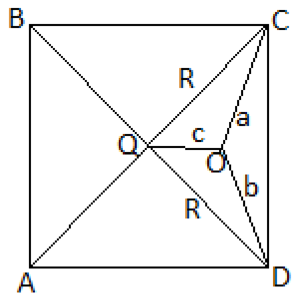
$$\begin{cases} \sin(2x - y) = 0 \\ \cos(x + 2y) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - y = \pi n & (*) \\ x + 2y = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ n, m \in Z & (**) \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10}(4n + 2m + 1) \\ y = \dfrac{\pi}{5}(2m - n + 1),\ \ n, m \in Z \end{cases} (***)$$

Семейство (*), $n \in Z$, состоит из параллельных прямых, равноотстоящих друг от друга на расстояние $d_1 = \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$. Прямые из семейства (**) параллельны между собой, перпендикулярны прямым из семейства (*) и равноотстоят друг от друга на расстояние $d_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$. Прямые из (*) и (**)

разбивают плоскость на квадраты со стороной $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, в вершинах которых находятся решения(***). Радиус круга, описанного около квадрата, равен $R_* = \frac{\pi}{\sqrt{10}}$. Если $R_{\min} < R_*$, то найдется круг радиуса $R_{\min}$ не содержащий решений (***).



Предположим, что существует круг радиуса R_*, не содержащий ни одной вершины из квадратов разбиения. Точка O – центр этого круга – принадлежит одному из квадратов разбиения.



Если точка O не совпадает с точкой Q – центром квадрата, то она принадлежит одному из треугольников, на которые разбивают квадрат его диагонали, например, треугольнику QCD. Тогда хотя бы один из треугольников QOC и QOD тупоугольный и либо $a < R$, либо $b < R$. Но тогда хотя бы одна из вершин C или D принадлежит кругу. Полученное противоречие показывает, что $R_{\min} = R_* = \frac{\pi}{\sqrt{10}}$

Задача 3 Доказательство. Пусть ученики школы упорядочены по убыванию числа взятых ими карандашей: ученик под номером k взял из коробки x_k карандашей и $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq x_{k+1} \geq \ldots$

По условию, для любого k выполняется неравенство

$$\frac{x_k}{x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+9}} \geq 0,6 \to (1-0,6)x_k \geq 0,6\left(x_{k+1} + \ldots + x_{k+9}\right) \to x_k \geq \frac{3}{2}\left(x_{k+1} + \ldots + x_{k+9}\right) \geq \frac{27}{2}x_{k+9},$$

т.е. $x_{k+9} \leq \frac{2}{27}x_k$ для любого k . Тогда для любого n

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \left(x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}\right) + \left(x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{19}\right) + \ldots \leq \left(x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{27} + \left(\frac{2}{27}\right)^2 + \ldots\right)$$

По условию, $x_1 \geq 0,6\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}\right) \to 0,4x_1 \geq 0,6\left(x_2 + \ldots + x_{10}\right) \to x_2 + \ldots + x_{10} \leq \frac{2}{3}x_1$. Суммируя прогрессию, получим неравенство

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq \frac{27}{25}\left(x_2 + x_3 + \ldots + x_{10}\right) \leq \frac{27}{25} \cdot \frac{2}{3}x_1 = \frac{18}{25}x_1 \to x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq \frac{43}{25}x_1$$

Если в школе n учеников, то $x_1 \geq \frac{25}{43}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) > 0,58 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$.

Задача 4 Ответ: $P(A) = 0,5\left(5\ln 1,6 - 1\right) \approx 0,675$

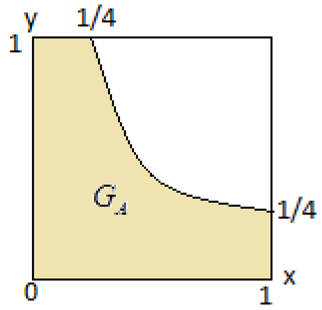
Решение. Введем обозначения: $DM = x \cdot DA,\ DN = y \cdot DA, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, S_{MNCD}$ – площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D, S_{ABCD} – площадь боковой поверхности пирамиды $ABCD$ с вершиной в точке D. Имеем

$$S_{MNCD} = xyS_{ABD} + xS_{BCD} + yS_{ACD} = \frac{xy + x + y}{3} S_{ABCD}$$

Условие:

$$\frac{xy + x + y}{3} S_{ABCD} \le \frac{1}{2} S_{ABCD} \to xy + x + y \le \frac{3}{2} \to y \le \frac{3 - 2x}{2(x+1)}$$

Пространство элементарных исходов опыта изображено в виде квадрата $K = [0;1] \times [0;1]$, а вероятность события A в этом пространстве равна площади области внутри квадрата, соответствующей этому событию. Событию $A = \left\{ S_{MNCD} \le \frac{1}{2} S_{ABCD} \right\}$ соответствует область G_A в квадрате K (заштрихована):

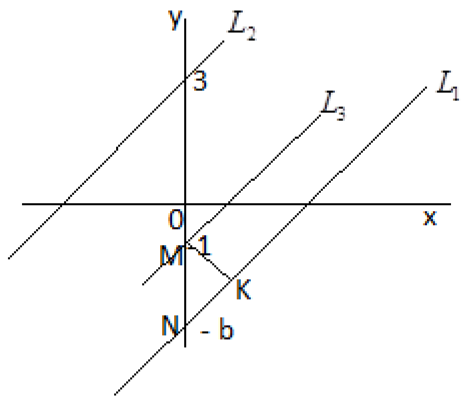


Криволинейный участок границы области G_A является графиком гиперболы $y = \frac{3 - 2x}{2(x+1)}$.

$$P(A) = S_{G_A} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{1/4}^{1} \frac{3 - 2x}{x + 1} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_{1/4}^{1} \left(\frac{5}{x+1} - 2 \right) dx = -\frac{1}{2} + 2,5 \ln(x+1) \Big|_{x=1/4}^{1} = 2,5 \ln \frac{8}{5} - \frac{1}{2} \approx 0,675$$

Задача 5 Ответ: $b \in [-5; 3]$

Решение. Центр $\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = a - b \end{cases}$ окружности $(x-a)^2 + (y-a+b)^2 = 2$ лежит на прямой L_1 с уравнением $x - y = b$ при любых $a \in R$. Прямая L_1 параллельна прямым $L_2 : x - y + 3 = 0$ и $L_3 : x - y - 1 = 0$.



Система имеет решение, если расстояние прямой L_1 до прямой L_3 (или прямой L_2) не превосходит радиуса окружности, т.е. $\sqrt{2}$. Расстояние между прямыми L_1 и L_3 равно $\frac{|b-1|}{\sqrt{2}}$, расстояние между прямыми L_1 и L_2 определяется формулой $\frac{|b+3|}{\sqrt{2}}$. Для совместности системы при любых a число b должно быть решением неравенства $\frac{|b-1|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2}$ (*), либо неравенства $\frac{|b+3|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2}$ (**). Решением неравенства (*) является отрезок $b \in [-1; 3]$, неравенства (**) – отрезок $[-5; -1]$. Объединение этих отрезков доставляет множество значений b, для которых система совместна при любых a.

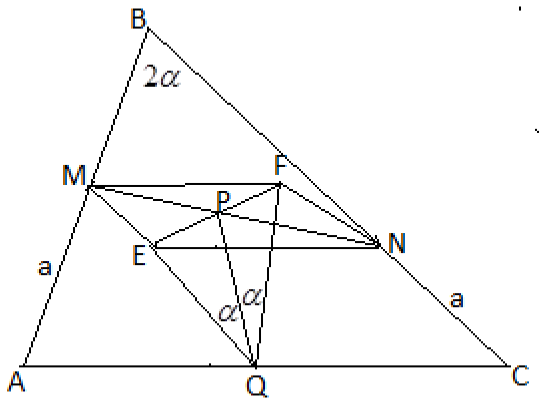
Задача 6 Ответ: $PQ = \frac{3}{2}$

Вариант 0

На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM = CN = a$. Точка P – середина отрезка MN, точка Q – середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен 2α. Найти длину отрезка PQ.

Ответ: $PQ = a\cos\alpha$

Решение.



Дополнительные построения:

1. построим параллелограммы $NCQE$ и $MAQF$;
2. построим треугольник EFQ;
3. построим четырехугольник $EMFN$.

Четырехугольник $EMFN$ параллелограмм, поскольку EN параллельна AC и ей же параллельна MF, при этом $EN = MF = \frac{AC}{2}$. MN является диагональю параллелограмма и ее середина – точка P – принадлежит второй диагонали EF. Треугольник EQF равнобедренный: $FQ = EQ = a$ и его медиана QP является медианой и высотой. Угол MQF равен углу ABC, как углы с параллельными сторонами. Тогда треугольник EPQ прямоугольный с гипотенузой a и острым углом α: $PQ = a\cos\alpha$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) 3 шага; 2) 7 движений вперед и 6 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при $a = 2$; 2) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{25}(3k - 4m - 2) \\ y = \frac{\pi}{50}(8k + 6m + 3), k, m \in Z \end{cases}$;

3) $R_{\min} = \frac{\pi}{5\sqrt{2}}$.

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ: $P(A) = 2(1 - \ln 2) \approx 0,61$

Задача 5 Ответ: $b \in \left(-\infty; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{17\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$

Задача 6 Ответ: $PQ = 1$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) 14 шагов; 2) 9 движений вперед и 12 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при $a=3$; 2) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}(n+m) \\ y=\frac{\pi}{2}(n-m), n, m \in Z \end{cases}$;

3) $R_{\min}=\frac{\pi}{2}$.

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ: $P(A)=0,25(7\ln 1,75-3)\approx 0,23$

Задача 5 Ответ: $b\in[-5;7]$

Задача 6 Ответ: $PQ=2$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) 4 шага; 2) 4 движения вперед и 6 движений назад

Задача 2 Ответ: 1) уравнение имеет решения при $a=-4$; 2) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{13}(2n+3m) \\ y=\frac{\pi}{13}(3n-2m), n, m \in Z \end{cases}$;

3) $R_{\min}=\frac{\pi}{\sqrt{26}}$.

Задача 3. Доказательство.

Задача 4 Ответ: $P(A)=1-3\ln\frac{4}{3}\approx 0,14$

Задача 5 Ответ: $b\in(-\infty;-7)\cup(5;+\infty)$

Задача 6 Ответ: $PQ=3$