Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1. Ответ: $k = 16$ столкновений.

На проволоку в форме окружности радиуса R нанизаны m бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени $(m-1)$ бусинку заставили двигаться с одинаковой скоростью v (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшуюся бусинку – с той же скоростью в обратном направлении. Полагается, что после столкновения двух бусинок скорость их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за T сек.?

Ответ: $k = \dfrac{T \cdot v \cdot (m-1)}{2\pi R}$

Решение. На рис 1 изображено движение двух бусинок A и B до соударения. На рис 2 – после соударения.

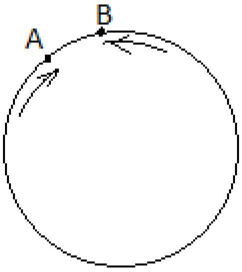


Рис 1

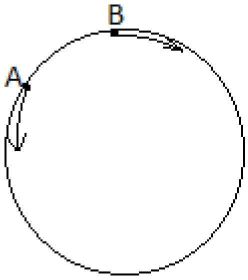


рис 2

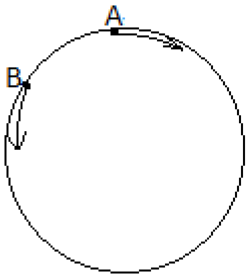


рис 3

Так как бусинки по виду одинаковые, то поменяв на рис 2 буквы A и B местами, можно интерпретировать столкновение как переход бусинки A через бусинку B (рис 3). За один оборот окружности по часовой стрелке образ бусинки A совершает $(m-1)$ столкновение. С учетом относительности движения, один оборот совершается за $\frac{2\pi R}{2v}=\frac{\pi R}{v}$ сек. Если число T ему кратно, то за время T совершается $\frac{T\cdot v}{\pi R}$ полных оборотов, что сопровождается $\frac{T\cdot v}{\pi R}\cdot(m-1)$ столкновениями. В варианте 1 $m=5, v=\frac{\pi}{2}\ (1/сек), R=6, T=48$

Задача 2 Ответ: $\frac{4\pi^2}{9}$

Решение. Решением первого уравнения $\sin(x+y)=\cos(2x-y)$ системы является два семейства параллельных прямых на плоскости:

$$\sin(x+y)=\cos(2x-y)\rightarrow\left[\begin{array}{l} 2x-y=\frac{\pi}{2}-x-y+2\pi n \\ 2x-y=x+y-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m,n\in Z \end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\quad(1.*) \\ x-2y=-\frac{\pi}{2}+2\pi m\quad(1.**) \end{array}\right.$$

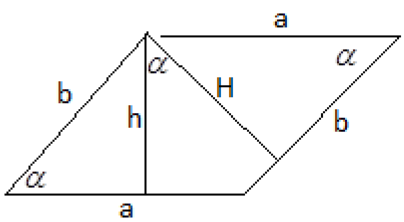
Решением второго уравнения $\cos(x-y)=\sin(x+2y)$ системы также являются два семейства параллельных прямых:

$$\cos(x-y)=\sin(x+2y)\rightarrow\left[\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{2}-x-2y+2\pi k \\ x-y=x+2y-\frac{\pi}{2}+2\pi s,\ k,s\in Z \end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l} 2x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ (2.*) \\ y=\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi s}{3},\ (2.**) \end{array}\right.$$

Расстояния между параллельными прямыми в каждом семействе указаны в таблице

(1,*)	(1,**)	(2,*)	(2,**)
$d_1=\frac{2\pi}{3}$	$d_2=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$d_3=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$	$d_4=\frac{2\pi}{3}$

Возможны шесть ($C_4^2=6$) случаев образования параллелограммов, удовлетворяющих условию задачи.



$$S=\frac{h\cdot H}{\sin\alpha}$$

Случай 1. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(1,*)$ и $(2.*)$ Наименьший по площади параллелограмм из этой серии содержит пару соседних параллельных прямых из семейств $(1,*)$ и $(2.*)$ соответственно. Острый угол параллелограмма вычисляется через нормали боковых сторон:

$$n_1 = \{1;0\},\ n_2 = \{2;1\}, \cos\alpha_1 = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Его площадь вычисляется по формуле $S_1 = \dfrac{d_1 \cdot d_3}{\sin\alpha_1} = \dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \dfrac{4\pi^2}{3}$

Случай 2. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(1,*)$ и $(2.**)$ Наименьший по площади параллелограмм из этой серии содержит пару соседних параллельных прямых из семейств $(1,*)$ и $(2.**)$ соответственно. Острый угол параллелограмма вычисляется через нормали боковых сторон:

$$n_1 = \{1;0\},\ n_2 = \{0;-1\}, \cos\alpha_1 = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = 0,\ \sin\alpha_1 = 1 \text{ (прямоугольник)}$$

Его площадь вычисляется по формуле $S_2 = \dfrac{d_1 \cdot d_4}{\sin\alpha_2} = \dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi^2}{9}$

Случай 3. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(1,**)$ и $(2.*)$ Наименьший по площади параллелограмм из этой серии содержит пару соседних параллельных прямых из семейств $(1,**)$ и $(2.*)$ соответственно. Острый угол параллелограмма вычисляется через нормали боковых сторон:

$$n_1 = \{1;-2\},\ n_2 = \{2;1\}, \cos\alpha_3 = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = 0,\ \sin\alpha_3 = 1 \text{ (прямоугольник)}$$

Его площадь вычисляется по формуле $S_3 = \dfrac{d_2 \cdot d_3}{\sin\alpha_3} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\pi^2}{5}$

Случай 4. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(1,**)$ и $(2.**)$ Наименьший по площади параллелограмм из этой серии содержит пару соседних параллельных прямых из семейств $(1,**)$ и $(2.**)$ соответственно. Острый угол параллелограмма вычисляется через нормали боковых сторон:

$$n_1 = \{-1;2\},\ n_2 = \{0;1\}, \cos\alpha_4 = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Его площадь вычисляется по формуле $S_4 = \dfrac{d_2 \cdot d_4}{\sin\alpha_4} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{5} = \dfrac{4\pi^2}{3}$

Случай 5. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(1,**)$ и $(1,*)$

Наименьшая площадь параллелограммов $S_5 = \dfrac{2\pi^2}{3}$.

Случай 6. Параллельные стороны параллелограмма принадлежат семейству $(2,**)$ и $(2,*)$

Наименьшая площадь параллелограммов $S_6 = \dfrac{4\pi^2}{3}$

Наименьшее значение площади параллелограмма соответствует S_2.

Задача 3 Ответ: $d = 23$

Решение. По условию задачи дробь $\dfrac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$ сократима для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Пусть d это наибольшее простое число, на которое делится числитель и знаменатель заданной дроби. Так как m и n взаимно простые числа, то возможны 3 случая.

Случай 1. $\begin{cases} m = ad, \\ m + 69n = bd. \end{cases}$ Имеем $69n = bd - m = (b-a)d$. Следовательно, $69n$ делится на d. Так как m делится на d, то n не делится на d, поэтому на d должно делится $69 = 3 \cdot 23.$ В данном случае наибольшее значение d=23. Этот случай реализуется при m=23, n=1.

Случай 2. $\begin{cases} n = ad, \\ n + 69m = bd. \end{cases}$ Имеем $69m = bd - n = (b-a)d$. Здесь такая же ситуация, как в случае 1 (m и n меняются местами). Наибольшее значение d равно 23.

Случай 3. $\begin{cases} n + 69m = ad, \\ m + 69n = bd. \end{cases}$ Складывая и вычитая уравнения, получим

$$\begin{cases} n + m + 69(n+m) = (a+b)d, \\ n - m + 69(m-n) = (a-b)d, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 70(n+m) = (a+b)d, \\ 68(m-n) = (a-b)d. \end{cases}$$

Проанализируем последнюю систему.

а) $n+m$ и $n-m$ делятся на d. Тогда (n+m)+(m–n)=2m делится на d и (n+m)–(m–n)=2n делится на d. Так как мы ищем наибольшее простое d, то будем рассматривать d>23, (d=23 мы уже нашли). Тогда получаем, что m и n делятся на d, а это противоречит условию задачи.

б) $n+m$ не делится на d. Тогда 70 делится на d. Так как $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$ то наибольшее простое d это 7.

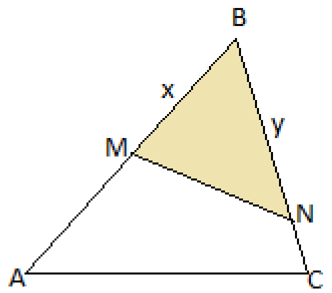
в) $n-m$ не делится на d. Тогда 68 делится на d. Так как $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17,$ то наибольшее простое d это 17.

Из рассмотренных выше случаев следует, что наибольшее значение d=23.

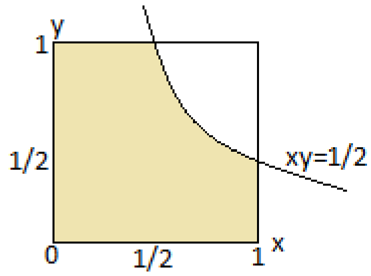
Задача 4 Ответ: $P(A) = \dfrac{1+\ln 2}{2}$

Решение. Введем обозначения: $BM = x \cdot BA,\ BN = y \cdot BC,\ x \in [0;1],\ y \in [0;1]$

По условию, независимые случайные величины x и y равномерно распределены на отрезке $[0;1]$.



Случайная величина $S_{BMN} = xy \cdot S_{ABC}$. Случайное событие $S_{BMN} \le \dfrac{S_{ABC}}{2}$ реализуется, если $xy \le \dfrac{1}{2}$. На рис изображено множество точек с координатами $(x; y)$ на квадрате $[0;1] \times [0;1]$, для которых $xy \le \dfrac{1}{2}$.



Вероятность события $A = \left\{ (x,y) : xy \le \dfrac{1}{2} \right\}$ равна площади заштрихованной части квадрата.

$$P(A) = \frac{1}{2} + \int_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \Big|_{x=0,5}^{1} = \frac{1+\ln 2}{2}.$$

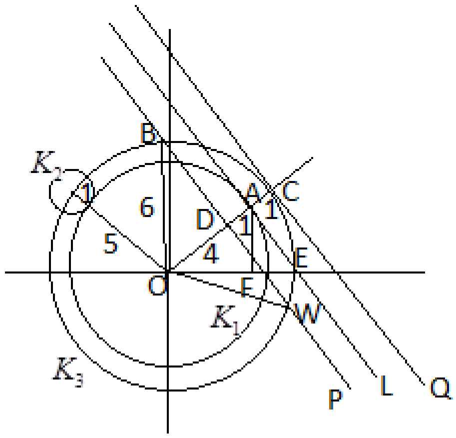
Задача 5 Ответ: 1) $a \in \left(\arccos \frac{8-3\sqrt{5}}{15} + 2\pi k; -\arccos \frac{8+3\sqrt{5}}{15} + 2\pi(k+1) \right), k \in Z$,

2) $a = \arccos \frac{4}{5} + 2\pi k, k \in Z$;

Иная форма записи ответа

$$1)\ a \in \left(\arccos \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k; \arccos \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{3} + 2\pi(k+1) \right), k \in Z$$

Решение. Множество точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющих первому уравнению системы, является объединением точек окружности $x^2 + y^2 = 25$ и прямой $4x + 3y = 25$, касающейся окружности в точке $(4;3)$. Для каждого значения a множество точек, удовлетворяющих второму уравнению, представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $(6\cos a; 6\sin a)$, расположенном на окружности радиуса 6 с центром в начале координат.



Прямая L с уравнением $4x + 3y = 25$ касается окружности K_1 в точке $A(4;3)$, прямые P и Q параллельны L и равноотстоят от нее на расстояние 1. Точка B лежит на пересечении окружности K_3 и прямой P и является центром окружности K_2, соответствующим значению параметра $a = \varphi$.

$$\varphi = \angle AOF + \angle DOB = \arccos \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{3}$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} - \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{8-3\sqrt{5}}{15} \to \varphi = \arccos \frac{8-3\sqrt{5}}{15}$$

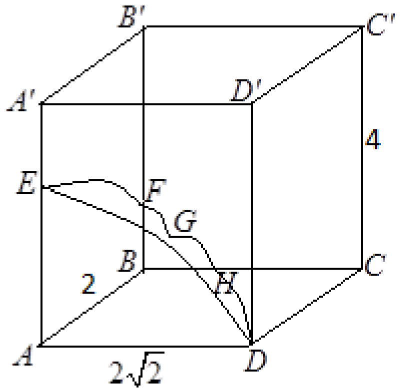
Точка W, симметричная точке B относительно прямой OA, соответствует значению параметра $a = \theta$:

$$\theta = 2\pi - \angle EOW = 2\pi - \arccos \frac{2}{3} + \arccos \frac{4}{5} \to \cos \theta = \frac{8+3\sqrt{5}}{15}$$

Для $a \in \left(\arccos \frac{8-3\sqrt{5}}{15} + 2\pi k; -\arccos \frac{8+3\sqrt{5}}{15} + 2\pi(k+1) \right), k \in Z$ окружность K_2 касается окружности K_1, но не касается прямой L. Эти значения параметра соответствуют случаю единственного решения системы. Помимо них единственное решение возникает при значении параметра $a = \arccos \frac{4}{5} + 2\pi k$, соответствующим случаю, когда центр окружности K_2 находится в точке C.

Задача 6 Ответ: $L = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$

Решение.



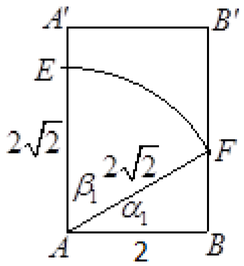
Поскольку расстояние между точками на поверхности не меньше расстояния между этими точками в пространстве, на гранях $A'B'C'D'$ и $DD'C'C$ (кроме точки D) нет точек, где побывал муравей. Точку D, находящуюся на пути муравья, можно считать началом пути. Проследим движение муравья по доступным для него граням коробки.

Случай 1. Путь по грани $AA'D'D$.

Поскольку начало пути лежит в этой грани, траекторией его движения на этой грани является четверть окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке A. Длина пройденного пути DE равна $\pi\sqrt{2}$.

Случай 2. Путь по грани $AA'B'B$.

Поскольку вершина A лежит в этой грани, траектория пути муравья по этой грани представляет собой дугу EF окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке A.



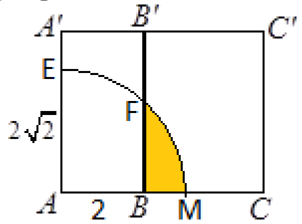
$$\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \to \beta_1 = \frac{\pi}{4} .$$

Длина пути EF равна $\frac{1}{8}$ длины окружности радиуса $2\sqrt{2}$ т.е. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Случай 3. Путь по грани $BB'C'C$.

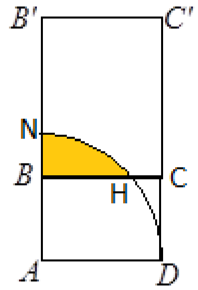
Выход траектории на грань $BB'C'C$ возможен через ребро BB' и ребро BC.

Случай 3.1. Развертка через ребро BB'.

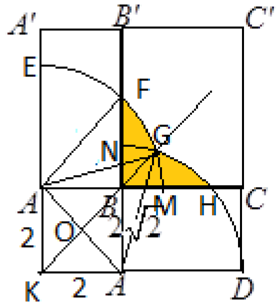


На рис отмечены желтым цветом точки грани $BB'C'C$, отстоящие от точки A на расстояние по поверхности коробки не большем $2\sqrt{2}$, если переход на грань осуществляется через ребро BB' .

Случай 3.2. Развертка через ребро BC.



На рис отмечены желтым цветом точки грани $BB'C'C$, отстоящие от точки A на расстояние по поверхности не большем $2\sqrt{2}$, если переход на грань осуществляется через ребро BC.
Объединяя случаи 3.1 и 3.2, получим множество точек грани $BB'C'C$ (отмечены на рис желтым цветом), расстояние которых по поверхности от точки A не больше $2\sqrt{2}$.



Точки дуг GN и GM удалены от вершины A на расстояние по поверхности меньшее $2\sqrt{2}$, поэтому траектория движения муравья по грани $BB'C'C$ представляет собой объединение дуг FG и GH окружностей радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в точке A. Вычислим длину кривой FGH. Треугольник AGO – прямоугольный с углом $\angle AGO = \frac{\pi}{6}$, $\angle GBC = \frac{\pi}{4}$, $\angle GAB = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \to \angle FAB = \frac{\pi}{4} \to \angle FAG = \frac{\pi}{6}$.

Тогда длина кривой FGH равна $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

Случай 4. Путь по грани $ABCD$. Аналогичен случаю 2 с длиной пути $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Объединяя случаи 1-4, получим длину пути муравья

$$L = \pi\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{2\pi\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $k = 60$ столкновений

Задача 2 Ответ: $\frac{4\pi^2}{17}$

Задача 3 Ответ: $d = 73$

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{2 - \ln 3}{3}$

Задача 5 Ответ: 1) $a = \arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, 2) $a = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{3}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$

Задача 6 Ответ: $L = \frac{8\pi}{3}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $k = 24$ столкновений

Задача 2 Ответ: $\frac{4\pi^2}{19}$

Задача 3 Ответ: $d = 83$

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{1+\ln 4}{4}$

Задача 5 Ответ: $a \in \left(\arccos\frac{12}{13} - \arccos\frac{6}{7} + 2\pi k, \arccos\frac{12}{13} + \arccos\frac{6}{7} + 2\pi k\right), a \neq \arccos\frac{12}{13} + 2\pi k, k \in Z$

Задача 6 Ответ: $L = 4\pi\sqrt{2}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $k = 28$ столкновений

Задача 2 Ответ: $\frac{4\pi^2}{19}$

Задача 3 Ответ: $d = 79$

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{4-\ln 5}{5}$

Задача 5 Ответ: $a \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), a \neq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Задача 6 Ответ: $L = 8\pi$