

Решения и ответы

Вариант 1

Задача 1 Ответ: 1) 3 пары; 2) (2;3), (32;3), (16,9)

Решение. Введем обозначения: $\log_2 x = n$, $\log_3 y = m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$

Допустимыми значениями НОД являются делители 36, представленные полными квадратами, т.е. 1,4,9 и 36.

Случай 1. $\text{НОД}(\log_2 x, 36) = 1 = \log_3^2 y$.

Число n не имеет среди делителей двойки и тройки, поэтому $n = 6s \pm 1$. Тогда

$$x = 2, x = 2^{6s \pm 1}, s \in \mathbb{Z}, s \geq 1, y = 3.$$

В квадрате таких пар две: (2;3), (2^5 ;3)

Случай 2. $\text{НОД}(\log_2 x, 36) = 4 = \log_3^2 y$.

Число $n = 4k$, при этом k не делится на 3, т.е. $n = 4(3s \pm 1)$, $s \geq 1$ и $n = 4$. Тогда

$$x = 16, x = 2^{12s \pm 4}, s \in \mathbb{Z}, s \geq 1, y = 3^2 = 9.$$

В квадрате таких пар только одна: (16,9)

Случай 3. $\text{НОД}(\log_2 x, 36) = 9 = \log_3^2 y$

Число $n = 9k$ при этом k не делится на 2, т.е. $n = 9(2s + 1)$, $s \geq 0$. Тогда

$$x = 2^{18s+9}, s \in \mathbb{Z}, s \geq 0, y = 3^3 = 27.$$

Таких пар в квадрате нет.

Случай 4. $\text{НОД}(\log_2 x, 36) = 36 = \log_3^2 y$

Число $n = 36s$, $s \in \mathbb{Z}, s \geq 1$. Тогда $x = 2^{36s}$, $s \in \mathbb{Z}, s \geq 0$, $y = 3^6 = 729$. Таких пар в квадрате нет.

Задача 2 Ответ: $S_{\min} = \frac{\pi^2}{6}$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(x-2y) = 0 \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y = \frac{\pi}{2} + \pi m \\ x+y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}(m+2k) \\ y = \frac{\pi}{3}(k-m) \end{cases}, m, n \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

Решения (*) расположены в узлах «косой» решетки на плоскости образованной семейством прямых

$$L_k : x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{и} \quad L_m : x - 2y = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

Если две вершины, например, A и B , искомого треугольника ABC наименьшей площади лежат на прямых семейства L_k , то A и B являются соседними вершинами решетки (в противном, его площадь может быть уменьшена) и

$$|x_A - x_B| = \frac{\pi}{3}, \quad |y_A - y_B| = \frac{\pi}{3} \rightarrow AB = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

Вершина C находится на соседней (параллельной) прямой из семейства L_k (иначе площадь может быть уменьшена). Поскольку расстояние между соседними прямыми из семейства L_k одинаковое и равно $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, площадь треугольника ABC равна $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$.

Если две вершины, например, B и C , находятся на прямой семейства L_m и являются соседними узлами решетки, то

$$|x_B - x_C| = \frac{2\pi}{3}, \quad |y_B - y_C| = \frac{\pi}{3} \rightarrow AB = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}.$$

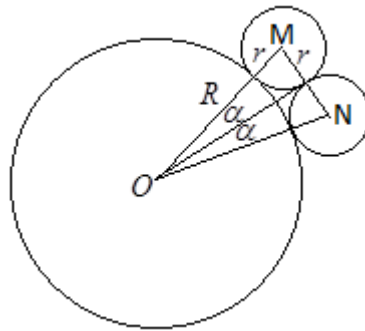
Вершина A находится на соседней (параллельной) прямой семейства L_m . Поскольку расстояние между соседними прямыми из семейства L_m одинаковое и равно $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$, площадь треугольника равна

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi^2}{6} = S_1$$

Задача 3 Ответ: 17 окружностей.

Решение.

Случай 1. Окружности радиуса r касаются окружности радиуса R внешним образом.



Рассмотрим сначала ситуацию, когда окружности радиуса r могут касаться друг друга.

Наибольшее число окружностей радиуса r , касающихся окружности радиуса R внешним образом, соответствует условию касания окружностей с центрами в точках M и N . Тогда

$$\sin \alpha = \frac{r}{R+r} \rightarrow \alpha = \arcsin \frac{r}{R+r}.$$

Наибольшее число n таких окружностей равно целой части числа $\frac{\pi}{\alpha}$, т.е.

$$n \leq \frac{\pi}{\arcsin \frac{r}{R+r}} < n+1 \rightarrow \frac{\pi}{n+1} < \arcsin \frac{r}{R+r} \leq \frac{\pi}{n} \rightarrow \sin \frac{\pi}{n+1} < \frac{r}{R+r} \leq \sin \frac{\pi}{n}$$

В случае, когда получается равенство (все окружности радиуса r касаются друг друга), нужно убрать одну окружность, чтобы выполнялось условие задачи – окружности радиуса r не имеют общих точек.

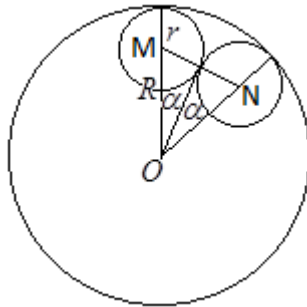
В варианте 1 $\sin \frac{\pi}{n+1} < \frac{1}{4} \leq \sin \frac{\pi}{n}$ Покажем, что этому неравенству удовлетворяет число $n=12$.

Левая часть неравенства удовлетворяется, поскольку $\sin \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{13} < \frac{1}{4}$. Для доказательства правой части неравенства возведем его в квадрат:

$$\frac{1}{16} < \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} < \frac{7}{8} \rightarrow \sqrt{3} < \frac{7}{4} \rightarrow 48 < 49$$

Так как неравенство строгое, то $n=12$ это количество окружностей радиуса 1, касающихся окружности радиуса 3, и не имеющих общих точек друг с другом.

Случай 2. Окружности касаются внутренним образом.



Снова рассмотрим сначала ситуацию, когда окружности радиуса r могут касаться друг друга.

По аналогии, $\sin \alpha = \frac{r}{R-r}$. Наибольшее число m окружностей, имеющих внутреннее касание, равно

целой части числа $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\arcsin \frac{r}{R-r}}$ и удовлетворяет неравенству $\sin \frac{\pi}{m+1} < \frac{r}{R-r} \leq \sin \frac{\pi}{m}$.

В варианте 1 это неравенство принимает вид: $\sin \frac{\pi}{m+1} < \frac{1}{2} \leq \sin \frac{\pi}{m}$ и ему удовлетворяет $m=6$. При

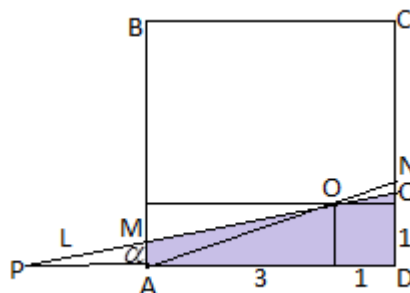
$m=6$ получаем равенство $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$. Это означает, что окружности радиуса 1 касаются друг друга.

И чтобы эти окружности не имели общих точек надо одну окружность убрать, то есть взять 5 окружностей. Объединяя случаи 1-2, приходим к ответу: максимальное число k окружностей, касающихся большой окружности равно $12+5=17$

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{\arctg 4 - \arctg(1/4)}{\pi} = \frac{\arctg 4 - \arctg(4)}{\pi} = \frac{2 \arctg 4}{\pi} - \frac{1}{2}$

Решение. Обозначения: Случайная величина α – угол наклона прямой L к стороне AD – распределена равномерно на $[0; \pi]$

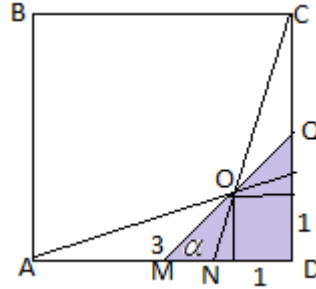
1. Случай $\alpha \in \left[0; \arctg \frac{1}{3}\right]$, рис 1 (трапеция)



Вычисление площади трапеции $AMQD$:

$$AM = (ctg\alpha - 3)tg\alpha = 1 - 3tg\alpha, \quad DQ = 1 + tg\alpha \rightarrow S_{AMQD} = 4 \cdot \frac{AM + DQ}{2} = 4(1 - tg\alpha)$$

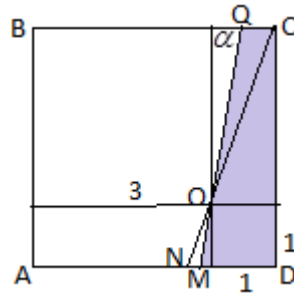
2. Случай $\alpha \in \left[\arctg \frac{1}{3}; \arctg 3 \right]$, рис 2 (треугольник)



Вычисление площади треугольника MQD :

$$MD = 1 + ctg\alpha, \quad QD = MD \cdot tg\alpha \rightarrow S_{MQD} = \frac{1}{2} MD \cdot QD = \frac{(1 + ctg\alpha)(1 + tg\alpha)}{2}$$

3. Случай $\alpha \in \left[\arctg 3; \frac{\pi}{2} \right]$, рис 3 (трапеция)



По симметрии со случаем 1, $S_{MQCD} = 4(1 - ctg\alpha)$

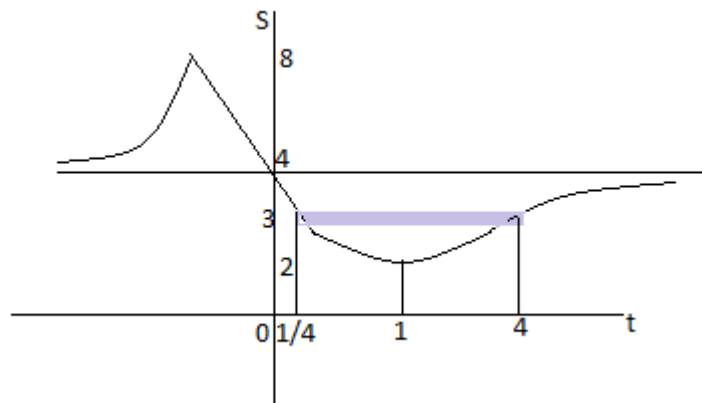
Случай 4. $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$ (трапеция) приводит к такой же формуле $S_{MQCD} = 4(1 - ctg\alpha)$

Случай 5. $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi \right]$ (трапеция) приводит к формуле аналогичной случаю 1 для площади меньшей части разрезанного квадрата $S_{AQMD} = 4(1 - tg\alpha)$

Замена $t = tg\alpha, t \in (-\infty; +\infty)$ позволяет объединить случаи 1-5 и представить зависимость площади меньшей части квадрата от t :

$$S_{\min}(t) = \begin{cases} 4(1-t), & t \in \left[-1; \frac{1}{3}\right] \\ \frac{4(t-1)}{t}, & t \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty) \\ \frac{(t+1)^2}{2t}, & t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right] \end{cases}$$

На рис изображен график функции $S_{\min}(t)$:



Значение площади $S \geq 2$ для всех t – минимум достигается при $t = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Значения $S \leq 3$ достигаются для $t \in [t_1; t_2]$, где t_1 и t_2 являются решениями уравнений:

$$4(1-t) = 3 \rightarrow t_1 = \frac{1}{4}, \quad \frac{4(t-1)}{t} = 3 \rightarrow t_2 = 4$$

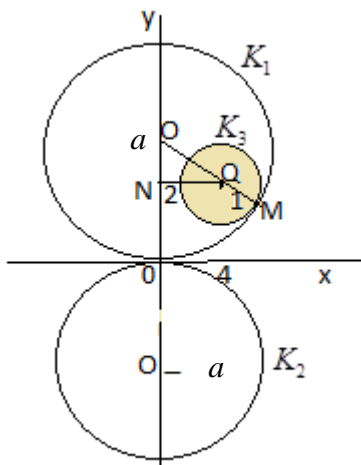
Возвращаясь к углам, благоприятные событию $S \leq 3$ значения $\alpha \in \left[\arctg \frac{1}{4}, \arctg 4 \right]$. Вероятность искомого события равна отношению длины этого отрезка к длине отрезка $[0; \pi]$, т.е.

$$P(A) = \frac{\arctg 4 - \arctg(1/4)}{\pi}$$

5. При каких a множество решений неравенства $x^2 + (|y| - a)^2 \leq a^2$ содержит все пары чисел $(x; y)$, для которых $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 1$?

Задача 5 Ответ: $a \in \left[\frac{19}{2}; +\infty \right)$

Решение.



Случай 1. $a \leq 0$. Первому неравенству удовлетворяет единственная точка $(0; 0)$, следовательно ситуация, при которой решения второго неравенства (точки круга радиуса 1) содержатся в решениях первого неравенства, невозможна.

Случай 2. $a > 0$. Решениями первого неравенства являются точки кругов K_1 и K_2 , где K_1 – круг радиуса a с центром в точке $O_1(0; a)$, а K_2 – круг радиуса a с центром в точке $O_2(0; -a)$. Решениями второго неравенства являются точки круга K_3 радиуса 1 с центром в точке $O(4; 2)$. Условия задачи будут выполнены, если круг K_3 окажется внутри круга K_1 . Эта ситуация реализуется, когда $O_1O \leq a - 1$. Получаем неравенство:

$$\sqrt{4^2 + (a-2)^2} \leq a-1.$$

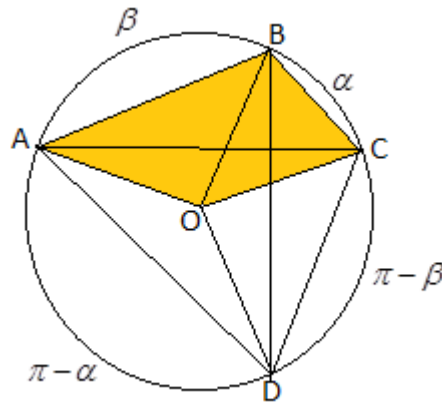
Оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} a-1 \geq 0, \\ 4^2 + (a-2)^2 \leq (a-1)^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a \geq \frac{19}{2}$.

Задача 6 Ответ: $s = 7,5$

Решение.



Пусть хорды BC и AB стягивают дуги с центральными углами α и β соответственно. Тогда в силу перпендикулярности диагоналей, хорды AD и CD стягивают дуги с центральными углами $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$. Сумма площадей треугольников BCO и ABO равна:

$$S_{BCO} + S_{ABO} = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta),$$

где R – радиус описанной окружности.

Сумма площадей треугольников ADO и CDO равна:

$$S_{ADO} + S_{CDO} = \frac{1}{2} R^2 (\sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi - \beta)) = \frac{1}{2} R^2 (\sin \alpha + \sin \beta) = S_{BCO} + S_{ABO}.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $ABCO$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$, равной $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) 6 пар; 2) (3;5), (27;5), (243;5), (2187;5), (6561, 25), (1; 625).

Задача 2 Ответ: $S_{\min} = \frac{\pi^2}{14}$

Задача 3 Ответ: 24 окружности (15+9)

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{\arctg 2 - \arctg(1/2)}{\pi} = \frac{\arctg 2 - \arctg 2}{\pi} = \frac{2 \arctg 2}{\pi} - \frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a \geq \frac{5}{2}$

Задача 6 Ответ: $s = 7$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) 2 пары; 2) (4; 49), (1024; 49)

Задача 2 Ответ: $S_{\min} = \frac{\pi^2}{6}$

Задача 3 Ответ: 30 окружностей. (18+12)

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{\arctg\left(\frac{4}{3}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} = \frac{\arctg\left(\frac{4}{3}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{4}{3}\right)}{\pi} = \frac{2\operatorname{arctg}(4/3)}{\pi} - \frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a < \frac{7}{3}$

Задача 6 Ответ: $s = 1,5$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) 2 пары; 2) (8;125), (64;125)

Задача 2 Ответ: $S_{\min} = \frac{\pi^2}{10}$

Задача 3 Ответ: 9 окружностей. (9+0)

Задача 4 Ответ: $P(A) = \frac{\arctg\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} = \frac{\arctg\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} = \frac{2\operatorname{arctg}(3/2)}{\pi} - \frac{1}{2}$

Задача 5 Ответ: $a = -\frac{8}{5}$

Задача 6 Ответ: $s = 12$