Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, осень 2018
10 класс

Вариант № 1

1. Путь от школы до дома в 120 м Петя проделал, сделав 150 шагов, причем длина каждого шага была не более a см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число a?

2. Целые положительные числа x, y, для которых $НОД(x,y)=2$, являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат и площадью $10\cdot НОК(x,y)$. Найти эти числа.

3. При каких значениях x выражение

$$2-\left|\cos\left(\pi\cos x\right)\right|-\left|\sin\left(2\pi\sqrt{3}\sin x\right)\right|$$

принимает наибольшее возможное значение?

4. Для каких значений a система $\begin{cases} 3x^2-5x+a+2=0 \\ 4x^2-ax-2a-4=0 \end{cases}$

совместна? Решить систему для всех допустимых a.

5. Центр окружности радиуса 1 лежит на окружности радиуса 2. Найти площадь объединения кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответы и решения

1. Если длина шага с номером $k, k=1,2,...,m$ равна l_k см, то по условию, $l_k \le a$ для любого k. Тогда существует k, для которого $\frac{100s}{m} \le l_k \le a$. В противном случае, сумма длин всех шагов меньше s.

Если $a < \dfrac{100s}{m-1}$, то для любой пары шагов длиной l_p и l_q справедливо условие: $l_p + l_q > l_r$ при любом r. Действительно, для любого k $l_k \le a < \dfrac{100s}{m-1}$ и при любых p, q

$$l_p + l_q = 100s - \sum_{k \ne p,q} l_k > 100s - \frac{m-2}{m-1}100s = \frac{100s}{m-1} > a \ge l_r .$$

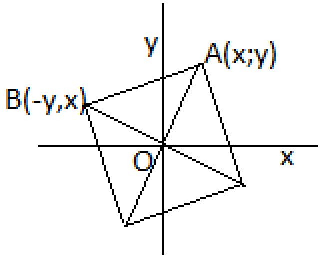
Если $a \ge \dfrac{100s}{m-1}$, условие задачи не выполнено, например, для длин шагов $l_k = \dfrac{100s}{m-1}$ для $k = 1, 2, ..., m-2$ и $l_{m-1} = l_m = \dfrac{100s}{2(m-1)} < a,$ поскольку $l_{m-1} + l_m = l_1$.

Таким образом, допустимыми значениями a является множество $\left[\dfrac{100s}{m}; \dfrac{100s}{m-1}\right)$.

В варианте 1 $s = 120, m = 150.$ Следовательно, $a \in \left[80; \dfrac{12000}{149}\right)$.

Ответ: $a \in \left[80; \dfrac{12000}{149}\right)$.

2. Пусть $A(x; y)$ − вершина квадрата с центром в начале координат, для котророй $НОД(x, y) = 2.$ Вычислим длину диагонали



квадрата $d = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ и найдем площадь квадрата $S = \frac{d^2}{2} = 2\left(x^2 + y^2\right)$. По условию задачи $S = 10НОК(x, y)$. В результате имеем уравнение:

$$2\left(x^2 + y^2\right) = 10НОК(x, y).$$

Используя свойство $НОД(x, y) \cdot НОК(x, y) = xy$, получим

$$НОК(x, y) = \frac{xy}{НОД(x, y)} = \frac{xy}{2}.$$

Подставляя $НОК(x, y)$ в записанное выше уравненние, имеем

$$2(x^2 + y^2) = 5xy.$$

Разделив последнее равенство на y^2 , получим квадратное

уравнение относительно $\frac{x}{y}$:

$$2\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 2 = 0.$$

Этоуравнение имеет решения $x = 2y$ и $y = 2x$.

Случай 1. $x = 2y$. Тогда $НОД(x, y) = НОД(2y, y) = y = 2$, а $x = 4$.

Случай 2. $y = 2x$. Тогда $НОД(x, y) = НОД(x, 2x) = x = 2$, *а* $y = 4$.

Ответ: 1) $x = 2, y = 4$; 2) $x = 4, y = 2$.

3. Заметим, что для всех x выражение

$$2-\left|\cos\left(\pi\cos x\right)\right|-\left|\sin\left(2\pi\sqrt{3}\sin x\right)\right|\le 2.$$

Найдем x, при которых это выражение равно 2:

$$\begin{cases} \cos(\pi\cos x)=0, \\ \sin(2\pi\sqrt{3}\sin x)=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos x=\dfrac{1}{2}+k, \\ \sin x=\dfrac{m}{2\sqrt{3}}, \end{cases} m,k\in Z.$$

Рассмотрим первое уравнение этой системы. Так как $\cos x\in\left[-1;1\right]$, то получаем неравенство на k:

$$-1\le\frac{1}{2}+k\le 1.$$

Отсюда находим: $k=-1$ и $k=0$.

Случай 1. $k=-1$. Тогда

$$\cos x=-\frac{1}{2}\to\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{1}{4}+\frac{m^2}{12}=1\to m^2=9\to m=\pm 3,$$

т.е. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$ является решением.

Случай 2. $k=0$

$$\cos x=\frac{1}{2}\to\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{1}{4}+\frac{m^2}{12}=1\to m^2=9\to m=\pm 3 \text{ т.е.}$$

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ является решением.

Объединяя оба случая, приходим к ответу $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

4. Перепишем исходную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} a=-3x^2+5x-2, \\ \left(x+2\right)a=4(x^2-1). \end{cases}$$

Заметим, что $x=-2$ не является решением второго уравнения системы. Следовательно систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a = -3x^2 + 5x - 2, \\ a = \dfrac{4(x^2-1)}{x+2}. \end{cases}$$

Если система совместна, то ее решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{4(x^2-1)}{x+2} = -3x^2 + 5x - 2.$$

Решим это уравнение. Для этого разложим левую и правую части уравнения на множители:

$$\frac{4(x-1)(x+1)}{x+2} = (x-1)(-3x+2).$$

Последнее уравнение приводися к виду

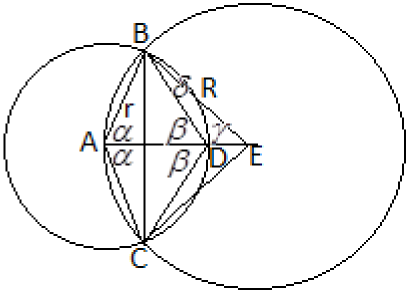
$$x(x-1)(3x+8) = 0.$$

Решение $x = 0$ соответствует пераметру $a = -2$, решение $x = 1$ – параметру $a = 0$, а $x = -\dfrac{8}{3}$ – параметру $a = -\dfrac{110}{3}$.

Ответ: 1) система совместна при $a = -2,\ 0,\ -\dfrac{110}{3}, -24;$

2) при $a = 0$ $x = 1$; при $a = -2$ $x = 0$; при $a = -\dfrac{110}{3}$ $x = -\dfrac{8}{3}.$

5. Пусть A и E – центры окружностей ω_1 и ω_2 радиусов r и R, соответственно $\left(r < R\right)$, причем по условию задачи $A \in \omega_2$, а B и C – точки пересечения этих окружностей. Заметим, что их общая хорда BC перпендикулярна отрезку AE. Имеем $AB = AC = r,$ $EB = EC = EA = R.$ Обозначим $\angle BAE = \angle CAE = \alpha,$ $\angle BEA = \angle CEA = \gamma.$



Запишем формулу для вычисления площади объединения кругов Ω_1 и Ω_2, ограниченных окружностями ω_1 и ω_2:

$S_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = S_{\Omega_1} + S_{\Omega_2} - S_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$,

где $S_{\Omega_1} = \pi r^2$, $S_{\Omega_2} = \pi R^2$ – площади кругов Ω_1 и Ω_2, а $S_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ – площадь их пересечения.

Найдем $S_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. Пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ состоит из двух сегментов $BDC \in \Omega_1$ и $BAC \in \Omega_2$. Обозначим площади этих сегментов через S_1 и S_2, соответственно.

Площадь S_1 сегмента BDC равна разности площадей сектора $BDCA$ и площади $\triangle ABC$:

$$S_1 = \frac{(2\alpha) r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha.$$

Так как $\triangle ABE$ равнобедренный $(AE = BE)$, то $\cos\alpha = \frac{r}{2R}$. Тогда

$$\alpha = \arccos\frac{r}{2R},\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{r}{2R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2}.$$

По условию задачи $r=1,\quad R=2$. Подставим эти значения в полученные выше формулы: $\cos\alpha=\frac{1}{4},\quad \alpha=\arccos\frac{1}{4},$ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}$. Тогда

$$S_1=\arccos\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{16}.$$

Площадь S_2 сегмента BAC равна разности площадей сектора $BACE$ и площади $\triangle CBE$:

$$S_2=\frac{(2\gamma)R^2}{2}-\frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma.$$

Так как $\triangle ABE$ равнобедренный $(AE=BE)$, то $\gamma=\pi-2\alpha.$ Найдем

$$\cos\gamma=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{15}{16}-\frac{1}{16}=\frac{7}{8},$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8},\ \sin 2\gamma=\frac{7\sqrt{15}}{32}.$$

Тогда

$$S_2=4\left(\pi-2\arccos\frac{1}{4}\right)-\frac{7\sqrt{15}}{16}.$$

Вычислим площадь пересечения кругов Ω_1 и Ω_2:

$$S_{\Omega_1\cap\Omega_2}=S_1+S_2=4\pi-7\arccos\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Подставляя полученный результат в формулу для вычисления площади объединения кругов Ω_1 и Ω_2, находим:

$$S_{\Omega_1\cup\Omega_2}=\pi+4\pi-\left(4\pi-7\arccos\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\pi+7\arccos\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $S = \pi + 7\arccos\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Вариант № 2

1. Путь от школы до дома в 140 м Коля проделал, сделав 200 шагов, причем длина каждого шага была не более a см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число a?

Ответ: $a \in \left[70; \dfrac{14000}{199}\right).$

2. Целые положительные числа x, y, для которых $НОД(x, y) = 3$, являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью $20 \cdot НОК(x, y)$. Найти периметр квадрата.

Ответ: $p = 24\sqrt{5}.$

3. При каких значениях x выражение

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi \sin 2x}{\sqrt{3}}\right) + \sin^2\left(2\sqrt{3}\pi \cos x\right)$$

принимает наименьшее возможное значение?

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

4. Для каких значений a система $\begin{cases} 3x^2 - x - a - 10 = 0 \\ (a+4)x + a + 12 = 0 \end{cases}$ совместна? Решить систему для всех допустимых a.

Ответ: 1) система совместна при $a = -10, -8, 4;$

2) при $a = -8$ $x = 1$; при $a = 4$ $x = -2$; при $a = -10$ $x = \dfrac{1}{3}$.

5. Центр окружности радиуса 2 лежит на окружности радиуса 3. Найти площадь пересечения кругов ограниченных этими окружностями.

Ответ: $S = 9\pi - 14\arccos\dfrac{1}{3} - 4\sqrt{2}.$

Вариант № 3

1. Путь от школы до дома в 300 м Вова проделал, сделав 400 шагов, причем длина каждого шага была не более a см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число a?

Ответ: $a \in \left[75; \frac{10000}{133}\right)$.

2. Целые положительные числа x, y, для которых $НОД(x, y) = 4$, являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью $\frac{50}{3} \cdot НОК(x, y)$. Найти длину диагонали квадрата.

Ответ: $d = 40$.

3. При каких значениях x выражение

$$3 - \left| tg\left(\sqrt{2}\pi \cos \pi x\right) \right| - \left| ctg\left(\frac{\pi\sqrt{2}\sin 3\pi x}{2}\right) \right|$$

принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $x = -\frac{1}{4} + \frac{n}{2}, n \in Z$.

4. Для каких значений a система $\begin{cases} 10x^2 + x - a - 11 = 0 \\ 4x^2 + (a+4)x - 3a - 8 = 0 \end{cases}$ с овместна? Решить систему для всех допустимых a.

Ответ: 1) система совместна при $a = 0, -2, 54$;

2) при $a = 0$ $x = 1$; при $a = -2$ $x = -1$; при $a = 54$ $x = \frac{5}{2}$.

5. Центр окружности радиуса 2 лежит на окружности радиуса 5. Найти площадь объединения кругов, ограниченных этими окружностями.

Ответ: $S = 4\pi + 46 \arccos\frac{1}{5} + 4\sqrt{6}$.

Вариант № 4

1. Путь от школы до дома в 180 м Костя проделал, сделав 300 шагов, причем длина каждого шага была не более a см, а сумма длин любых двух шагов была больше длины любого другого шага. Какие значения при этих условиях может принимать число a?

Ответ: $a \in \left[60; \frac{18000}{299}\right)$.

2. Целые положительные числа x, y, для которых $НОД(x,y)=5$, являются координатами вершины квадрата с центром в начале координат с площадью $\frac{169}{6} \cdot НОК(x,y)$. Найти длину стороны квадрата.

Ответ: $a = 65\sqrt{2}$.

3. При каких значениях x выражение

$$4 + tg^2\left(2\pi \sin \pi x\right) + ctg^2\left(3\pi \cos 2\pi x\right)$$

принимает наименьшее возможное значение?

Ответ: $x = \pm\frac{1}{6} + 2m,\ x = \pm\frac{5}{6} + 2m,\ m \in Z.$

4. Для каких значений a система $\begin{cases} 12x^2 + 48x - a + 36 = 0 \\ (a+60)x - 3(a-20) = 0 \end{cases}$ совместна? Решить систему для всех допустимых a.

Ответ: 1) система совместна при $a = -12, 0, 180;$

2) при $a = -12$ $x = -2$; при $a = 0$ $x = -1$; при $a = 180$ $x = 2$.

5. При каком наибольшем целом n два решения уравнения $x^3 - \left(n+9\right)x^2 + \left(2n^2 - 3n - 34\right)x + 2(n-4)(n+3) = 0$ больше 2?

Ответ: $S = 9\pi - 17\arccos\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{35}}{2}.$