Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 9 класс
2017-2018 учебный год

1. Петя сбежал по эскалатору метро, двигающемуся вниз, от верха до низа, развернулся и побежал в обратном направлении. Добежав до верха, измерил затраченное время. В этот момент эскалатор был переключен на движение в обратном направлении. Петя решил повторить эксперимент: пробежать по эскалатору туда и обратно и измерить затраченное время. Какое из времен оказалось большим и во сколько раз, если скорость движения Пети относительно лестницы при подъеме в 1,5 раза больше скорости движения лестницы, а скорость на спуске – в 2 раза больше скорости движения лестницы?

2. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета и не менее четырех – другого?

3. Найти x и y, если $\begin{cases} 2x-3\{y\}=0,5 \\ x+y=3,5 \end{cases}$, где $\{y\}$ – дробная часть числа y.

4. Найти наибольшее целое трехзначное число n, для которого число $15n^2+13n+2$ делится на 49.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше 4. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: время маневра по спускающему эскалатору в $\frac{5}{3}$ раза больше, чем по поднимающемуся.

Решение: $v-$ скорость движения лестницы эскалатора, $W\downarrow = 2v, W\uparrow = 1,5v$ – скорости движения Пети относительно лестницы вверх и вниз соответственно, $S-$ длина эскалатора.

1. Время маневра при движении эскалатора вниз.

$$T_1 = \frac{S}{v+2v} + \frac{S}{1,5v-v} = \frac{7S}{3v}$$

2. Время маневра при движении эскалатора вверх.

$$T_2 = \frac{S}{2v-v} + \frac{S}{1,5v+v} = \frac{7S}{5v} > T_1$$

3. Сравнение: $T_1 : T_2 = 5:3$

Задача 2 Ответ: 10 конфет

Решение

Если Петя вытащит 11 или более конфет, то условие задачи не может быть выполнено. Действительно, при наборе: 3 желтых +8 красных = 11 конфет может случиться, что останется по 2 конфеты в желтых и красных обертках и условие задачи не выполнено. Если Петя вытащит 10 конфет, то не менее 3 конфет желтых или красных останется в мешке. При этом в мешке останется не менее 5 конфет в синих обертках.

Задача 3 Ответ: 1) $x_1 = 1,6;\ y_1 = 1,9$ 2) $x_2 = 1;\ y_2 = 2,5$ 3) $x_3 = 0,4;\ y_3 = 3,1$

Решение. $y = [y] + \{y\} \to \begin{cases} 2x - 3y = 0,5 - 3[y] \\ x + y = 3,5 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{11 - 3[y]}{5} \\ y = \dfrac{3[y] + 6,5}{5} \end{cases}$

Из последнего равенства

$$\{y\} = y - [y] = \frac{3[y]+6,5}{5} - [y] = \frac{6,5 - 2[y]}{5} \in [0;1) \to 1,5 < 2[y] \le 6,5 \to 0,75 < [y] \le 3,25$$

Из условия целочисленности возможные значения для $[y] = 1;2;3$.

Для $[y] = 1 \to x = \left.\dfrac{11-3[y]}{5}\right|_{[y]=1} = \dfrac{8}{5} = 1,6 \to y = \left.\dfrac{3[y]+6,5}{5}\right|_{[y]=1} = 1,9$

$$[y] = 2 \to x = \left.\frac{11-3[y]}{5}\right|_{[y]=2} = 1 \to y = \left.\frac{3[y]+6,5}{5}\right|_{[y]=2} = 2,5$$

$$[y] = 3 \to x = \left.\frac{11-3[y]}{5}\right|_{[y]=3} = 0,4 \to y = \left.\frac{3[y]+6,5}{5}\right|_{[y]=3} = 3,1$$

Задача 4 Ответ: 998

Решение

$A = 15n^2 + 13n + 2 = (3n+2)(5n+1)$ делится на 49, если

Случай 1. $3n+2$ делится на 49.

$49m - 3n = 2 \to \begin{cases} m = 2 + 3t \\ n = 32 + 49t, t \in Z \end{cases}$. Наибольшее трехзначное число в серии соответствует $t = 19$ и равно $n_1 = 963$

Случай 2. $5n+1$ делится на 49.

$49m - 5n = 1 \to \begin{cases} m = -1 + 5t, \\ n = -10 + 49t \end{cases}$ Наибольшее трехзначное число в серии соответствует $t = 20$ и равно $n_2 = 970$

Случай 3. $3n+2$ делится на 7 и $5n+1$ делится на 7.

$$3n + 2 = 7m \to 7m - 3n = 2 \to \begin{cases} m = 3t + 2 \\ n = 7t + 4, t \in Z \end{cases}$$

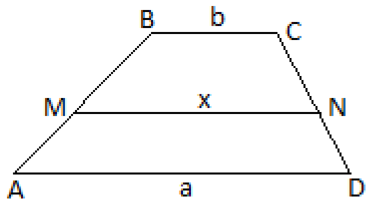
$5n+1=7k, k\in Z \to 5(7t+4)+1=7k \to k-5t=3 \to k=5t+3$. Таким образом, при любых целых t и $n=7t+4$ оба сомножителя делятся на 7, а число A на 49. Наибольшее трехзначное n равно $n_3=998$.

Задача 5 Ответ: $MN_{max}=2$

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC проведена прямая L параллельная AD и пересекающая стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что четырехугольники $AMND$ и $MBSN$ подобные, а сумма длин сторон AD и BC не больше p. Найти наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN.

Ответ: $MN_{max}=\dfrac{p}{2}$

Решение.



Обозначения: $AD=a,\ \ BC=b,\ \ MN=x$

Из подобия трапеций следует пропорциональность сходственных сторон:

$\dfrac{b}{x}=\dfrac{x}{a}\to x^2=ab\to x=\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{p}{2}$. Максимальная длина $MN=\dfrac{p}{2}$ и достигается при $a=b$ (достигается на параллелограмме).

Вариант 2

Задача 1 Ответ: время движения по спускающему эскалатору в $\dfrac{23}{7}$ раза больше, чем по поднимающемуся.

Задача 2 Ответ: 7 карандашей

Задача 3 Ответ: $x=1,5;\ y=-2,5$

Задача 4 Ответ: 496

Задача 5 Ответ: $MN_{max}=3$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: время движения по спускающему эскалатору в $\dfrac{13}{8}$ раза больше, чем по поднимающемуся.

Задача 2 Ответ: 11 шаров

Задача 3 Ответ: $x=2,2;\ y=-1,5$

Задача 4 Ответ: 694

Задача 5 Ответ: $MN_{max}=4$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: время движения по спускающему эскалатору в $\dfrac{27}{17}$ раза больше, чем по поднимающемуся.

Задача 2 Ответ: 8 кукол

Задача 3 Ответ: $x=-2,5;\ y=1,5$

Задача 4 Ответ: 796

Задача 5 Ответ: $MN_{max} = 5$