Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 8 класс
2017-2018 учебный год

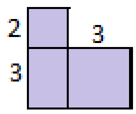
1. Саша и Маша, катаясь на коньках по кругу в одном направлении, встречались, когда Саша в очередной раз обгонял Машу. После очередной встречи, Саша быстро развернулся и поехал с той же скоростью в противоположном направлении. После этого он стал встречать Машу в три раза чаще. Во сколько раз Саша едет быстрее Маши?

2. В мешке деда Мороза находится 30 одинаковых по форме конфет в разных по цвету обертках: 5 желтых, 10 красных и 15 синих. Петя, не заглядывая в мешок, вынимает из него несколько конфет. Какое максимальное количество конфет может взять Петя, чтобы быть уверенным в том, что в мешке останется не менее трех конфет одного цвета?

3. В строчку записаны все целые числа от 1 до 2017. Возможно ли перед ними поставить знаки $\pm$ так, чтобы их сумма равнялась 2019?

4. Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 3 имеет остаток 2, b при делении на 7 – остаток 1, а их произведение при делении на 21 имеет в остатке 2. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b трехзначные числа.

5. С помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого фигуре



Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: в два раза

Решение

T_1 – время между очередными встречами при движении в одном направлении;

T_2 – время между очередными встречами при движении в противоположных направлениях;

V_M – скорость Маши; V_A – скорость Саши; R – радиус круга;

$T_1 = \dfrac{2\pi R}{V_A - V_M}$, $T_2 = \dfrac{2\pi R}{V_A + V_M}$. По условию

$$T_1 = 3T_2 \to \frac{2\pi R}{V_A - V_M} = 3\cdot\frac{2\pi R}{V_A + V_M} \to V_A + V_M = 3\left(V_A - V_M\right) \to 2V_A = 4V_M \to V_A : V_M = 2$$

Задача 2 Ответ: 23 конфеты

Решение

Если в каждом цвете останется не более 2 конфет, то Петя вынул из мешка не менее 24 конфет. Если Петя вытащил из мешка менее 24 конфет, то хотя бы в одном цвете осталось не менее 3 конфет.

Задача 3

Решение

Пусть сумма всех чисел, перед которыми был поставлен знак +, равна S_1^+, а сумма оставшихся чисел, имеющих знак –, равна S_2^-. Тогда по условию $\begin{cases} S_1^+ - S_2^- = 1+2+\ldots+2017 = 2017\cdot 1009 = 2035153 \\ S_1^+ + S_2^- = 2019 \end{cases}$

Решая систему, получим $S_1^+ = 1018586,\ S_2^- = -1016567$. Каким числам из 1, 2, … 2017 нужно приписать +, чтобы их сумма была равна $S_1^+ = 1018586$? Это можно делать различными способами. Остановимся на таком:

Сумма чисел $s = 1427+1428+\ldots+2017 = 1722\cdot 591 = 1017702$. Разница $S_1^+ - s = 1018586 - 1017702 = 884$.

Если числу 884 приписать знак +, то вместе с числами $1427, 1428, \ldots, 2017$, которым также присваивается +, они составят S_1^+. Все остальные числа берутся со знаком –.

Задача 4 Ответ: $(a+b)_{\min} = 213$

Решение.

$a = 3n+2,\ n \ge 0,\ n \in Z$, $b = 7m+1,\ m \ge 0,\ m \in Z$

Число $ab = 21mn + 14m + 3n + 2$ имеет при делении на 21 остаток 2, если число $14m+3n$ делится на 21, т.е. $14m + 3n = 21k,\ k \in Z$. Левая часть равенства делится на 7, если $n = 7t,\ t \in Z$ и делится на 3, если $m = 3s, s \in Z$, т.е. с учетом трех значности чисел a и b $a = 21t+2,\ t \in [5,47]$, $b = 21s+1,\ s \in [5,47]$. Тогда $a+b = 21(t+s)+3$ минимально, если $t+s$ минимально, т.е. $t = s = 5$ и $(a+b)_{\min} = 213$.

Задача 5

Решение

Площадь заданной фигуры 19. С помощью циркуля откладываем на прямой отрезок длины 19. Для этого достаточно взять с рис отрезки длины 5 и 3 ($AB = 19 = 5+5+3+3+3$).

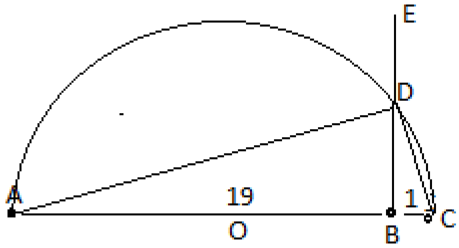
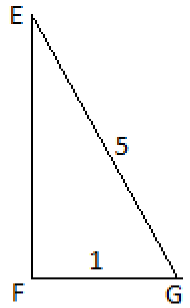


Рис 1

На той же прямой откладываем отрезок BC по длине 1 ($3-2=1$). На отрезке AC, как на диаметре, строим окружность K. Для этого с помощью циркуля и линейки делим отрезок AC пополам (точка O - центр окружности) и радиусом OA проводим окружность. Из точки B с помощью циркуля и линейки восстанавливаем перпендикуляр BD до пересечения с окружностью. Для этого на сторонах произвольного прямого угла EFG



откладываем отрезок FG по длине равный 1 и точку E, такую, что $EG=5$. На рис 1 строим точку E, как пересечение окружностей с центрами в точках B и C с радиусами EF и 5 соответственно. Соединяем точки B и E прямой, пересекающей полуокружность в точке D. Длина отрезка DB – сторона искомого квадрата. Действительно, треугольник ADC прямоугольный, поскольку угол ADC вписанный и опирается на дугу в половину окружности. Отрезок DB – перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, поэтому $DB^2=AB\cdot BC=19$.

Вариант 2

Задача 1 Ответ: в полтора раза

Задача 2 Ответ: 24 карандаша

Задача 3 Ответ: невозможно

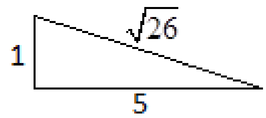
Решение

$$\begin{cases} S_1^+ - S_2^- = 1+2+\ldots+2017 = 2017\cdot 1009 = 2035153 \\ S_1^+ + S_2^- = 2018 \end{cases}$$

Складывая уравнения, получим $2\cdot S_1^+ = 2037171$, т.е. число S_1^+ нецелое.

Задача 4 Ответ: $(a+b)_{\max}=147$

Задача 5



Вариант 3

Задача 1 Ответ: в $\frac{5}{3}$ раза

Задача 2 Ответ: 28 шар

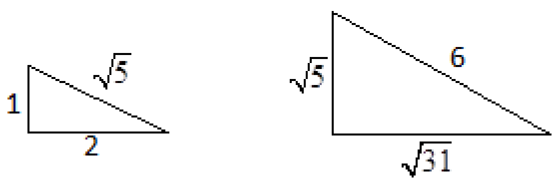
Задача 3

Ответ: возможно, например, знак + присваивается числу 466 и всем числам от 1426 до 2016

Задача 4 Ответ: $(a+b)_{\min}=2009$

Задача 5

Решение. Площадь фигуры 31.



Вариант 4

Задача 1 Ответ: в 1,4 раза

Задача 2 Ответ: 9 кукол

Задача 3 Ответ: невозможно (объяснить почему)

Задача 4 Ответ: $(a+b)_{\max} = 1728$

Задача 5
Решение. Площадь фигуры 41