Задания очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
Математика, 10 класс
2017 г.

1 Вариант
Максимальный балл за каждую задачу – 2 балла.

1. Арифметическая прогрессия a_n такова, что ее разность не равна нулю, а a_{10}, a_{13} и a_{19} являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти отношение $a_{12} : a_{18}$.

Решение. Пусть $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 -$ первый член прогрессии, $d -$ ее разность. Тогда $a_{10} = a_1 + 9d,\ a_{13} = a_1 + 12d,\ a_{19} = a_1 + 18d$. По свойству геометрической прогрессии имеем $a_{10} \cdot a_{19} = a_{13}{}^2 : (a_1 + 9d)(a_1 + 18d) = (a_1 + 12d)^2 \to 18d^2 + 3a_1 d = 0 \to a_1 = -6d.$ Тогда

$$a_{12} : a_{18} = \frac{a_1 + 11d}{a_1 + 17d} = \frac{-6d + 11d}{-6d + 17d} = \frac{5}{11}.$$

Ответ: $a_{12} : a_{18} = 5 : 11.$

2. Сколько решений имеет уравнение $\left[2x - x^2\right] + 2\left\{\cos 2\pi x\right\} = 0$? Укажите наименьшее и наибольшее их них. Здесь $\left[a\right] -$ целая часть числа $a -$ наибольшее целое число не превосходящее a, $\left\{a\right\} = a - \left[a\right] -$ дробная часть числа a.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\left[2x - x^2\right] = -2\left\{\cos 2\pi x\right\}$. Поскольку

$$\left\{\cos 2\pi x\right\} \in \left[0;1\right) \to \left[2x - x^2\right] \in \left(-2;0\right] \to \left[2x - x^2\right] = -1, \left[2x - x^2\right] = 0.$$

Возможны два случая:

Случай 1. $\begin{cases} \left[2x - x^2\right] = -1 \\ \left\{\cos 2\pi x\right\} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; **Случай 2.** $\begin{cases} \left[2x - x^2\right] = 0 \\ \left\{\cos 2\pi x\right\} = 0 \end{cases}$.

Случай 1. $\begin{cases} \left[2x - x^2\right] = -1 \\ \left\{\cos 2\pi x\right\} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 2x - x^2 < 0 \\ \left\{\cos 2\pi x\right\} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \le 0 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \\ \cos 2\pi x = \dfrac{1}{2} + n, n \in Z \end{cases} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[1 - \sqrt{2}; 0\right) \cup \left(2; 1 + \sqrt{2}\right] \\ \cos 2\pi x = \pm \dfrac{1}{2} \leftrightarrow x = \pm \dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{2}, k \in Z \end{cases}$$

Первая серия $x = \dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{2}$ попадает в интервал $\left[1 - \sqrt{2}; 0\right)$ при $k = -1 \to x_1 = -\dfrac{1}{3}$ и в интервал $\left(2; 1 + \sqrt{2}\right]$ при $k = 4 \to x_2 = \dfrac{13}{6}$. Вторая серия $x = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{2}$ попадает в интервал $\left[1 - \sqrt{2}; 0\right)$ при $k = 0 \to x_3 = -\dfrac{1}{6}$ и в интервал $\left(2; 1 + \sqrt{2}\right]$ при $k = 5 \to x_4 = \dfrac{7}{3}$.

Случай 2. $\begin{cases} \left[2x-x^2\right]=0 \\ \{\cos 2\pi x\}=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0\le 2x-x^2<1 \\ \{\cos 2\pi x\}=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ x(x-2)\le 0 \end{cases} \\ \cos 2\pi x = n, n\in Z \end{cases} \leftrightarrow$

$$\begin{cases} x\in[0;2], x\ne 1 \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2\pi x=\pm 1 \\ \cos 2\pi x = 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k}{2}, k\in Z \\ x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{k}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Первая серия принадлежит $x\in[0;2], x\ne 1$ при $k=0,1,3,4$ и им соответствуют решения $x_5=0, x_6=\frac{1}{2}, x_7=\frac{3}{2}, x_8=2$. Вторая серия принадлежит $x\in[0;2], x\ne 1$ при $k=0,1,2,3$ и им соответствуют решения $x_9=\frac{1}{4}, x_{10}=\frac{3}{4}, x_{11}=\frac{5}{4}, x_{12}=\frac{7}{4}$.

Ответ: Всего 12 решений, $x_{\min}=-\frac{1}{3}, x_{\max}=\frac{7}{3}$.

3. При каких a система $\begin{cases} x\cos a + y\sin a = 5\cos a + 2\sin a \\ -3\le x+2y\le 7,\ \ -9\le 3x-4y\le 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

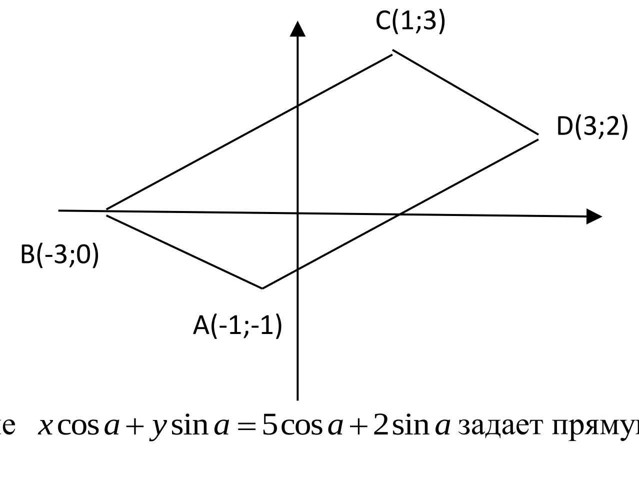
Решение. Неравенства в системе ограничивают параллелограмм:

$$y=\frac{-x-3}{2}, y=\frac{-x+7}{2}, y=\frac{3x+9}{4}, y=\frac{3x-1}{4}.$$

Найдем его вершины:

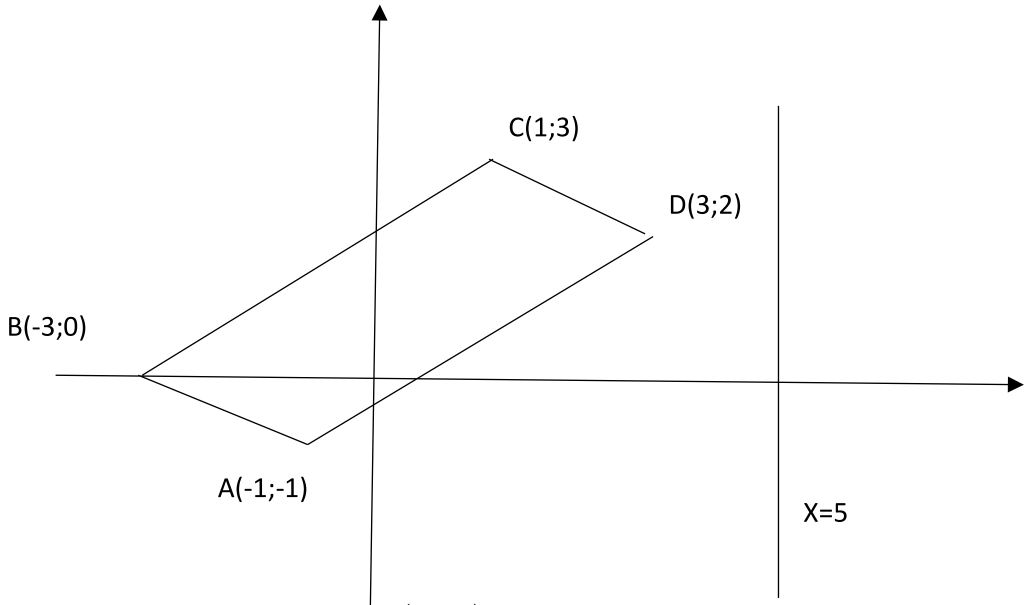
$A:\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x-4y-1=0 \end{cases} \to A(-1;-1)$ $\quad B:\begin{cases} x+2y+3=0 \\ 3x-4y+9=0 \end{cases} \to B(-3;0)$

$C:\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3x-4y+9=0 \end{cases} \to C(1;3)$ $\quad D:\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 3x-4y-1=0 \end{cases} \to D(3;2)$

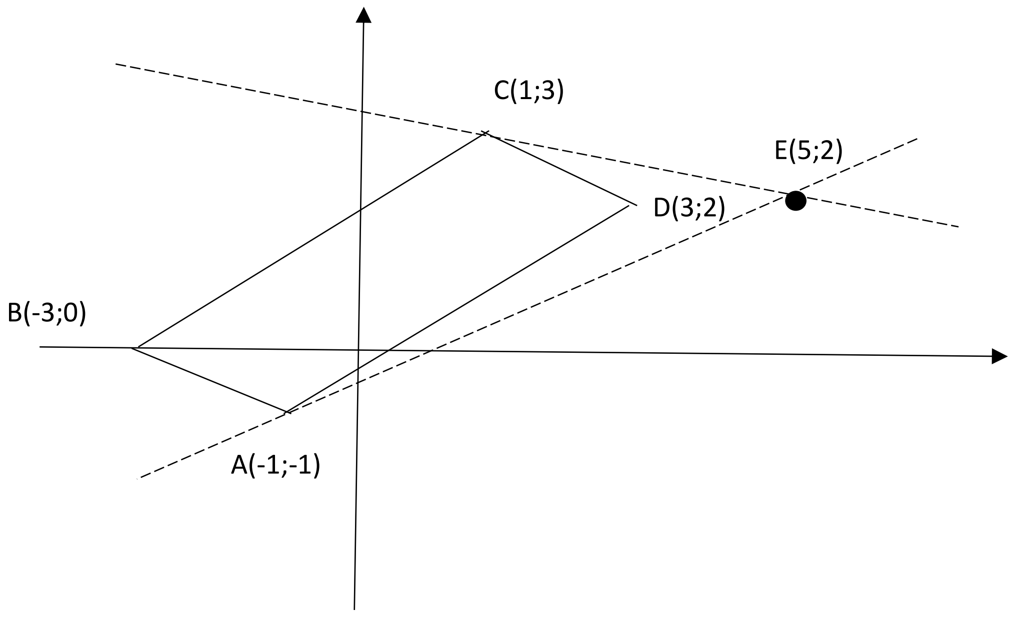


Уравнение $x\cos a + y\sin a = 5\cos a + 2\sin a$ задает прямую.

Случай 1. $\sin a = 0 \to a = \pi k \to x = 5$ – решений нет.



Случай 2. $\sin a \neq 0 \to y = \operatorname{ctg} a(5-x)+2.$– пучок прямых, проходящих через точку $E(5;2)$ и угловым коэффициентом $\operatorname{ctg} a$. Единственное решение: прямая проходит через C(1;3) или A(-1;-1).



$$\left[\begin{array}{l} 3 = \operatorname{ctg} a(5-1)+2 \to \operatorname{ctg} a = \frac{1}{4} \to a = arctg4 + \pi k, k \in Z \\ -1 = \operatorname{ctg} a(5+1)+2 \to \operatorname{ctg} a = -\frac{1}{2} \to a = -arctg2 + \pi k, k \in Z \end{array}\right..$$

Ответ: $a_1 = arctg4 + \pi k,\ a_2 = -arctg2 + \pi k,\ k \in Z.$

4. При каком наименьшем целом *n* все решения уравнения
$x^3-(5n-9)x^2+\left(6n^2-31n-106\right)x-6(n-8)(n+2)=0$ больше -1?

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^3-(5n-9)x^2+\left(6n^2-31n-106\right)x-6n^2+36n+96=0.$$

Заметим, что $x_1=1>-1$ является его решением при всех n (сумма коэффициентов многочлена в левой части уравнения равна нулю для всех *n*). Разделим уравнение на *x*-1:

$$x^2-5(n-2)x+6(n^2-6n-16)=0.$$

Корни этого уравнения: $x_2=3(n+2),\ x_3=2(n-8)$. Ищем, когда эти решения больше -1:

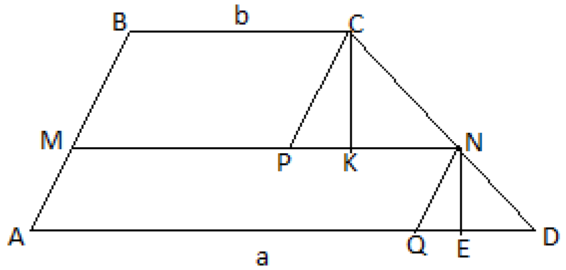
$$\begin{cases}3(n+2)>-1\\2(n-8)>-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}n>-\dfrac{7}{3},n\in Z\\n>\dfrac{15}{2},n\in Z\end{cases}\rightarrow n\geq 8.$$

Так как n целое, то $n\geq 8, n\in Z.$

Ответ: $n_{\min}=8$.

5. Средняя линия трапеции равна 4. Прямая, параллельная основаниям трапеции и делящая ее площадь пополам, пересекает боковые стороны в точках M и N. Найти наименьшую возможную длину отрезка MN .

Решение.



Обозначения: $AD=a,\ BC=b,\ CK=H,\ NE=h-$высоты треугольников NCP и DNQ, $MN=x$;

$$S_{AMND}=S_{MBCN}\rightarrow\frac{x+b}{2}H=\frac{a+x}{2}h\rightarrow\frac{H}{h}=\frac{a+x}{x+b}.$$

$$\triangle NCP \sim \triangle DNQ\rightarrow\frac{H}{h}=\frac{x-b}{a-x}\rightarrow\frac{a+x}{x+b}=\frac{x-b}{a-x}\rightarrow a^2-x^2=x^2-b^2\rightarrow x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Так как $a+b=8,$, то $x=\sqrt{\dfrac{a^2+\left(8-a\right)^2}{2}}=\sqrt{a^2-16a+32}=\sqrt{\left(a-4\right)^2+16}.$

Ответ: $MN_{\min}=4.$

Ответы для других вариантов.

2 вариант

Задача 1. Ответ: $a_{17}:a_{21}=17:33.$

Задача 2. Ответ: Всего 8 решений, $x_{\min}=-\dfrac{7}{18},x_{\max}=\dfrac{79}{18}.$

Задача 3. Ответ: $a\in\left[\pi k;\pi(k+1)-arctg\dfrac{8}{3}\right],k\in Z.$

Задача 4. Ответ: $n_{\max}=5.$

Задача 5. Ответ: $MN_{\min} = 8$.

3 вариант

Задача 1. Ответ: $a_{21} : a_{37} = 15 : 23$.

Задача 2. Ответ: Всего 21 решение, $x_{\min} = -\dfrac{31}{24}, x_{\max} = \dfrac{31}{24}$.

Задача 3. Ответ: $a \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{5\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z$.

Задача 4. Ответ: $n_{\min} = -1$.

Задача 5. Ответ: $MN_{\min} = 4$.

4 Вариант

Задача 1. Ответ: $a_{13} : a_{18} = 68 : 73$.

Задача 2. Ответ: Всего 16 решений, $x_{\min} = -\dfrac{11}{9}, x_{\max} = \dfrac{11}{9}$.

Задача 3. Ответ: $a \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in Z$.

Задача 4 Ответ: $n_{\max} = 7$.

Задача 5 Ответ: $MN_{\min} = 6$.