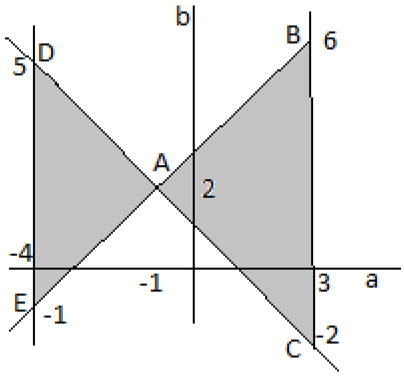
Ответы и решения

1. Ответ: $S_D = 25$

Решение

Условие пересечения: $(a+b-1)(b-a-3) \le 0$

На рис изображена область D



Уравнение прямой $BE: b = a+3$, уравнение прямой $DC: b = 1-a$. Координаты точки $A(-1;2)$.

Длины сторон $BC = 8,\ DE = 6$. Высота треугольника ADE равна $h_A = 3$, высота треугольника ABC равна $H_A = 4$. Площадь области $S_D = \frac{1}{2}(6\cdot 3 + 8\cdot 4) = 25$

2. Ответ: $n = 6k+1,\ n = 2+6k,\ n = 5+6k,\ k \ge 0, k \in Z$

Решение

Заметим, что $a_{n+6} = a_n$ для всех n. В таблице указаны значения a_n и a_{n+1} для $n = 1, 2, ..., 6$.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	3	2	1	6
a_{n+1}	2	3	2	1	6	1

Случай 1. $n = 1$

Уравнение $x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = 1,\ x_2 = -2$

Случай 2. $n = 2$

Уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 3$

Случай 3. $n = 3$

Уравнение $x^2 - 3x - 2 = 0 \to D = 17 \to$ целых корней нет

Случай 4. $n = 4$

Уравнение $x^2 - 2x - 1 = 0 \to D = 8 \to$ целых корней нет

Случай 5. $n = 5$

Уравнение $x^2 - x - 6 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 3$

Случай 6. $n = 6$

Уравнение $x^2 - 6x - 1 = 0 \to D = 40 \to$ целых корней нет

3. Ответ: $a = b = c = 2$

Решение

Коэффициенты $(r_n; r_{n+1}, r_{n+2})$ при неизвестных a, b, c при любых n принимают только 3 различных значения $(0;1;2)$, $(1;2;0)$, $(2;0;1)$ - циклические перестановки. Тогда a, b, c являются решениями системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Циклическая перестановка решений a, b, c приводит к той же системе, поэтому $a = b = c$. Подставляя их в первое уравнение, получим $a = b = c = 2$.

4. Ответ: $S = \left(2^9 - 1\right) \cdot \dfrac{(3^4 - 1)}{2} \cdot \dfrac{(5^7 - 1)}{4}$

Решение

Сумма делителей вида $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^p,\ p = 1,..6$ равна $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^6 = \dfrac{5^7 - 1}{4} = s_1$.

Сумма делителей вида $2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6$ равна $3 \cdot \dfrac{5^7 - 1}{4} = 3s_1$, сумма делителей вида $2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6$ равна $3^2 \cdot \dfrac{5^7 - 1}{4} = 3^2 s_1$ и т.д., сумма делителей вида $2^0 \cdot 3^q \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6;\ q = 1, 2, 3$ равна

$$(3^1 + 3^2 + 3^3)\frac{5^7 - 1}{4} = (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3)\frac{5^7 - 1}{4} - s_1 = s_2 \to s_1 + s_2 = \frac{3^4 - 1}{2} \cdot \frac{5^7 - 1}{4}$$

Наконец, сумма делителей вида $2^1 \cdot 3^q \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6;\ q = 1, 2, 3$ равна $2(s_1 + s_2)$, сумма делителей вида $2^2 \cdot 3^q \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6;\ q = 1, 2, 3$ равна $2^2(s_1 + s_2)$ и т.д., сумма делителей вида $2^r \cdot 3^q \cdot 5^p,\ p = 1, 2, ..., 6;\ q = 1, 2, 3;\ r = 1, 2, ..., 8$ равна

$$(2 + 2^2 + ... + 2^8)(s_1 + s_2) = (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^8)(s_1 + s_2) - (s_1 + s_2) = s_3.$$

Откуда сумма всех делителей $s_1 + s_2 + s_3 = \left(2^9 - 1\right)(s_1 + s_2) = \left(2^9 - 1\right) \cdot \dfrac{(3^4 - 1)}{2} \cdot \dfrac{(5^7 - 1)}{4}$

5. Ответ: 1) $AM:MB=\dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}}$. 2) $BN:NC=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(m+n)}-\sqrt{n}}$

Решение

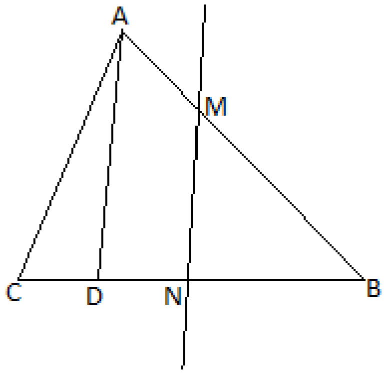


Рис 1

Обозначения:

$AM:MB=p:q,\ BN:NC=u:v$ (искомые величины)

$S_{ACD}:S_{ABD}=m:n,\ \ m<n$ (условие)

$$S_{ABD}=\frac{n}{m+n}S_{ABC},\ \ S_{ACD}=\frac{m}{m+n}S_{ABC},\ S_{MBN}=\frac{S_{ABC}}{2}$$

Треугольники MBN и ABD подобные с коэффициентом $k=\dfrac{q}{p+q}$, поэтому

$$S_{MBN}:S_{ABD}=k^2\to S_{MBN}:S_{ABD}=\frac{m+n}{2n}=\left(\frac{q}{p+q}\right)^2\to\frac{p+q}{q}=\sqrt{\frac{2n}{m+n}}\to p:q=\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$BN:BD=\frac{q}{p+q},\ \ BD=\frac{n}{m+n}BC\to BN=\frac{qn}{(p+q)(m+n)}BC\to NC=BC-BN\to$$

$$\to NC=\left(1-\frac{qn}{(p+q)(m+n)}\right)BC=\left(\frac{pm+qm+pn}{(p+q)(m+n)}\right)BC$$

$$BN:NC=u:v=\frac{nq}{pm+qm+pn}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(m+n)}-\sqrt{n}}$$