Ответы и решения

1. Решение. В делителях числа $a=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, делящихся на 3, число 2 можно выбрать с показателями 0, 1, 2, 3 (4 варианта), число 3 – с показателями 1, 2 (2 варианта), число 5 – с показателями 0, 1, 2 (3 варианта). Поэтому общее количество делителей равно $4\cdot 2\cdot 3=24.$ Сумма делителей числа $b=2^3\cdot 5^2$ равна $\left(1+2+4+8\right)(1+5+25)=465.$ Тогда сумма делителей числа a, делящихся на 3, равна $(3+3^2)\cdot 465=12\cdot 465=5580.$

2. Решение. Так как искомое целое решение x кратно 10 и 12, то оно кратно 60, следовательно, его можно записать в виде $x=60t,\, t\in Z.$ Подставим $x=60t$ в исходное уравнение:

$3600t^2+60bt-9600=0.$ Выразим b: $b=\dfrac{160}{t}-60t.$ Для целочисленности b число t должно быть делителем числа 160. $160=2^5\cdot 5$. Число $160=2^5\cdot 5$ имеет 12 положительных делителей:

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 5, 2\cdot 5, 2^2\cdot 5, 2^3\cdot 5, 2^4\cdot 5, 2^5\cdot 5.$ С учетом знака получаем 24 делителя. Каждому из них соответствуют решение $x=60t$ и целое $b=\dfrac{160}{t}-60t$. Следовательно, количество целых b, удовлетворяющих условию задачи, равно 24. Поскольку при увеличении t величина b убывает, наибольшее b соответствует наименьшему $t=-160,$ поэтому $b_{\max}=-1+60\cdot 160=9599.$

3. Решение. Так как 20 не делится на 3, то $НОД(x,20)$ также не делится на 3. Поэтому уравнение $НОД\left(15, НОД(x,20)\right)=5$ эквивалентно условию $НОД(x,20)$ делится на 5, что возможно тогда и только тогда, когда x делится на 5. Таким образом, условие задачи равносильно тому, что x делится на 5 и на 3, то есть x делится на 15. Следовательно, x можно записать в виде $x=15\,m, m=1,2....$ Наименьшее трехзначное $x=105$ получается при $m=7,$ а наибольшее трехзначное $x=990$ получается при $m=66,$ всего 60 чисел.

4. Решение. По теореме Безу остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x-a$ равен $p(a).$

Поэтому условия задачи равносильны системе:

$$\begin{cases}4a+2b+c=15\\ a+b+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=11-3a\\ c=2a-7\end{cases}.$$

Таким образом, $p(x)=ax^2+(11-3a)x+2a-7.$ Минимальное значение квадратного трехчлена $p(x)$ (ордината вершины параболы) достигается в его вершине $x_в=\dfrac{3a-11}{2a}.$ Оно равно

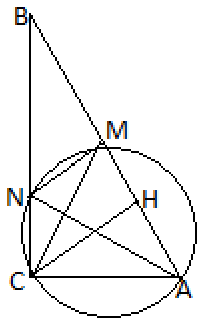
$$p_{\min}\left(x\right)=p\left(x_в\right)=p\left(\frac{3a-11}{2a}\right)=-\frac{a^2-38a+121}{4a}=\frac{19}{2}-\frac{1}{4}\left(a+\frac{121}{a}\right)=4-\left(\sqrt{a}-\frac{11}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

Эта величина максимальна тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}-\dfrac{11}{\sqrt{a}}=0$, то есть $a=11.$ При $a=11$

$x_в=1,$

а $p(x_в) = 4.$

5. Решение. Так как $\angle ACB = 90^0$ и $\angle NMA = 90^0$, то около четырехугольника $ACNM$ можно описать окружность.



Рассмотрим треугольник MCH. Он прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора имеем:
$MC^2 = MH^2 + CH^2 = MH^2 + 3MH^2 = 4MH^2.$

Отсюда находим $MH : MC = 1 : 2,$ из чего следует, что $\angle MCH = 30^0.$ Так как $MN \| CH$, то $\angle NMC = \angle MCH = 30^0.$ Углы NMC и NAC вписанные и опираются на одну дугу, поэтому $\angle NAC = 30^0$. Вычислим $\angle CMH$: $\angle CMH = 90^0 - \angle NMC = 60^0.$ Из условия перпендикулярности MC и AN следует, что $\angle NAM = 30^0$. Тогда $\angle BAC = \angle MAN + \angle NAC = 60^0$, а $\angle ABC = 30^0.$