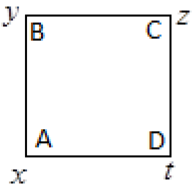
Ответы и решения

1. Ответ: 26

Решение.



Если сумма чисел на сторонах BC и CD одинаковая, то $z+t=z+y \to t=y$. Аналогично $z+t=x+t \to z=x$, т.е. числа, находящиеся на концах диагонали, должны быть равными.

Обозначение $t=y=a,\ z=x=b$.

По условию, $xyzt=a^2 \cdot b^2 \le 144 \to ab \le 12$

Возможные значения для $x+y+z+t=2(a+b)$ равны 26, 16, 14 и наибольшая сумма 26.

2. Ответ: $\Sigma_a = 1680$

Решение

Обозначение $a=p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{r_m},\ b=p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{r_m}$. Здесь $p_k -$ простые делители, $r_k -$ их кратности.

Пусть q_i - любой делитель числа b. Тогда $q_i, p_1 q_i, p_1^2 q_i, \ldots, p_1^{r_1} q_i -$ делители числа a. Их сумма $\sigma_i = q_i\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)$. Тогда сумма всех делителей числа a равна

$$\Sigma_a = \sum_i \sigma_i = \left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\sum_i q_i = \left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\Sigma_b$$

Повторяя то же для Σ_b, получим формулу для суммы всех делителей числа a:

$$\Sigma_a = \left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\cdot\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{r_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+p_m+p_m^2+\ldots+p_m^{r_m}\right)$$

Для варианта 1 $a=540=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ и $\Sigma_a=(1+2+2^2)\cdot(1+3+3^2+3^3)\cdot(1+5)=7\cdot 40\cdot 6=1680$

3. Ответ: 1) 167 чисел; 2) $x_{\max}=975$

Решение

По условию 1) $5x=6k+3 \to \begin{cases} x=6t-3 \\ k=5t-3 \end{cases} \to 1 \le 6t-3 \le 1000 \to t=1,2,\ldots,167$, т.е. 167 решений.

По условию 2)

$$x=5m,\ m>0, m\in Z \to НОД\left(6;25m\right)=3 \to 25m=6k+3 \to \begin{cases} m=3s \\ 25s-2k=1 \end{cases} \to \begin{cases} m=6t+3 \\ \begin{cases} s=1+2t \\ k=12+25t, \end{cases} \end{cases}$$

Тогда $x=30t+15,\ t\ge 0,\ t\in Z$.

Ограничение:

$1 \le 30t+15 \le 1000 \to t=0,1,2,\ldots 32$. Всего 33 решения, $x_{\max}=30\cdot 32+15=975$

4. Ответ: $400\ \text{см}^2$

Решение

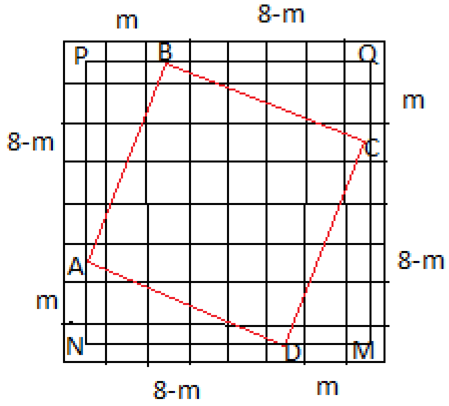


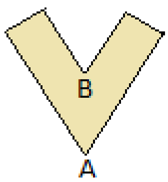
Рис 1

Вершины A, B, C, D расположены в серединах клеток с номером m, считая от вершин доски, на сторонах квадрата $PQMN$. Длина $PB = 4(m-1)$, длина $BQ = PA = 4(8-m)$. Площадь квадрата $ABCD$ равна $S(m) = 16\left((m-1)^2 + (8-m)^2\right) = 16\left(2m^2 - 18m + 65\right)$. Ее минимальное значение $400\ \text{см}^2$ достигается при $m = 4$ или $m = 5$.

5. Ответ: $R_{\max} = \dfrac{hH}{h+H} = \dfrac{6}{5}$

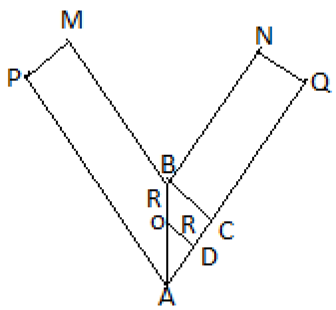
Вариант 0

Лист бумаги имеет форму, изображенную на рис. Расстояние между параллельными краями листа равно h, расстояние между вершинами A и B равно H. Найти наибольший радиус круга, который можно вырезать из такого листа.



Ответ: $R_{\max} = \dfrac{hH}{h+H}$

Решение



Прямые BN и AQ параллельны, прямые BM и AP параллельны, BC и OD перпендикулярны AQ, $OB = OD = R$. Из подобия треугольников AOD и ABC:

$$\frac{H-R}{R} = \frac{H}{h} \to R_1 = \frac{Hh}{H+h}$$

Если искомый круг касается параллельных краев листа, то максимальный радиус равен $R_2 = \frac{h}{2}$.

При $H > h \to R_1 > R_2$ и наоборот.