Ответы и решения

1. Ответ: 28 учеников

Решение

Обозначение: $x-$ число учеников в классе, $p-$ число второгодников, $0 < p \le 5$

Уравнение: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+p=x \to x=28\cdot\frac{p}{3}$. Для того, чтобы число x было целым необходимо, чтобы $p=3$ и тогда $x=28$

2. Ответ: 1) 72 делителя; 2) $d_{\max}=49000$

Решение

Разложение на множители: $a=2^3\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2$. Делители чисел $a_1=2^3\cdot3^2\cdot7^2$ и $a_2=2^3\cdot5^3\cdot7^2$ являются делителями a, не делящимися на 15. Число a_1 имеет $4\times3\times3=36$ различных делителей, а число a_2 имеет $4\times4\times3=48$ различных делителей. НОД$(a_1,a_2)=2^3\cdot7^2$, поэтому все делители НОД(a_1,a_2) являются общими делителями a_1 и a_2. Их число $4\times3=12$. Тогда искомое число делителей равно $36+48-12=72$. Наибольший из них $a_2=49000$

3. Ответ: 1) 9 дробей; 2) $\left(\frac{p}{q}\right)_{\min}=\frac{1}{5}$

Решение

Преобразование:

$$\frac{p-1}{q}<\frac{p}{q+1}\to(p-1)(q+1)<pq\to p-q<1$$

Для $q=1\to0<p<2\to p=1$, т.е. существует единственная дробь $\frac{p}{q}=\frac{1}{1}=1$, не удовлетворяющая условию задачи.

Для $q=2\to0<p<3\to p=1;2$, т.е. существуют одна дробь $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, удовлетворяющая условию задачи.

Для $q=3\to0<p<4\to p=1;2;3$, т.е. существует две дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{3};\frac{2}{3}$, удовлетворяющие условию.

Для $q=4\to0<p<5\to p=1;2;3;4$, т.е. существует три дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{4};\frac{3}{4}$, удовлетворяющие условию.

Для $q=5\to0<p<6\to p=1;2;3;4;5$, т.е. существует четыре дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}$, удовлетворяющие условию.

Общее число дробей равно $1+2+2+4=9$. Наименьшая дробь $\left(\frac{p}{q}\right)_{\min}=\frac{1}{5}$.

4. Ответ: $s=2$

Решение

Преобразование:

$$2[x+1]+3[y+2]=2[x]+2+3[y]+6=13\to 2[x]+3[y]=5$$

В полосе $-2\le x\le 3$ целая часть x принимает значения $[x]=-2,-1,0,1,2,3$

Случай 1. $[x]=-2\to[y]=3\to x\in[-2;3),\, y\in[3;4)$

Случай 2. $[x]=-1\to 3[y]=7$ - решений нет

Случай 3. $[x]=0\to 3[y]=5$ - решений нет

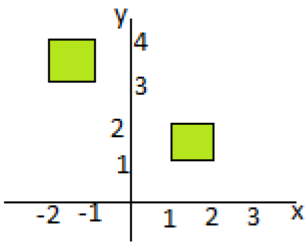
Случай 4. $[x]=1\to[y]=1\to x\in[1;2),\, y\in[1;2)$

Случай 5. $[x]=2\to 3[y]=1$ - решений нет

Случай 6. $[x]=3\to 3[y]=-1$ - решений нет

Область D представляет объединение двух квадратов со стороной 1 с неполной границей (там, где строгие неравенства)

Ее площадь равна 2.



5. Ответ: $n=119$

Решение

Пусть $A-$ точка пересечения трех выделенных прямых. Треугольников с вершиной в точке A 21 штука, поскольку любая пара прямых из выделенной тройки (3 варианта) вместе с любой прямой из невыделенных 7 (7 вариантов) порождает треугольник ($3\times 7=21$). Любая тройка из невыделенных 7 прямых ($7\times 6\times 5=210$ вариантов) порождает треугольник, не все из которых различные. Если прямые, образовавшие треугольник, поменять местами (6 вариантов), то треугольник останется прежним, т.е. в 210 треугольниках такой треугольник учитывался 6 раз.

Таким образом, в этом случае число различных треугольников со сторонами на невыделенных прямых равно $210:6=35$.

Наконец, число треугольников, одна из сторон которых лежит на выделенной прямой, а две других лежат на двух невыделенных прямых равно $3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 63$

Искомое число различных треугольников $n = 21 + 35 + 63 = 119$