Ответы и решения

1.Решение. Пусть $a=\overline{xyzuv},\ b=\overline{vuzyx}$, где $x,y,z,u,v-$ цифры, причем $x\neq 0,\ v\neq 0$. По условию, $x+v=6$ или $x+v=16$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае число $a+b$ шестизначное.

По условию, $y+u=5$ или $y+u=15$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае третья цифра числа $a+b$ будет нечетной. Наконец, $2z=8.$ Следовательно, $z=4.$ Среди чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x+v=6 \\ y+u=5 \\ z=4 \end{cases},$$

наибольшим является $a_{\max}=55401.$

2.Решение. Когда родился Володя, папе было 24 года, а маме на 3 года меньше, т.е. 21 год. Дима родился, когда маме стало 26 лет, т.е. через 5лет, поэтому папе в это время было 29 лет. Вычислим сумму возрастов: $29+26+5+0=60.$ Через год все члены семьи стали старше на год, поэтому сумма возрастов увеличилась на 4 и стала $30+27+6+1=64,$ а еще через год – снова на 4 и стала $31+28+7+2=68.$ Таким образом, если Володя пошел в школу в 5 лет, то Диме было 0 лет, если Володя пошел в школу в 6 лет, то Диме был 1 год, а если Володя пошел в школу с 7 лет, то Диме было 2 года.

3. Решение. Случай 1. Число $a=333333.$ Это число не меняется при циклических перестановках, поэтому оно единственное и сумма чисел равна самому этому числу, то есть 333333.

Случай 2. Число a состоит из трех одинаковых циклов по две цифры, например, $a=242424.$ У таких чисел имеется две различных циклических перестановки: 242424 и 424242, сумма которых равна $666666=2\cdot 333333.$ Для любого другого такого числа получим ту же сумму его циклических перестановок: $151515+515151=666666$ и т.д.

Случай 3. Число a состоит из двух одинаковых циклов по три цифры, например, $a=423423.$ У таких чисел имеется три различных циклических перестановок: 423423, 342342 и 234234, сумма которых равна $999999=3\cdot 333333.$ Для любого другого такого числа получим ту же сумму его циклических перестановок: $513513+351351+135135=999999$ и т.д.

Случай 4. Все шесть циклических перестановок различны. Пусть

$$a=a_5\cdot 10^5+a_4\cdot 10^4+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0.$$

Если выписать все его циклические перестановки в таком же виде, результаты сложить, перегруппировав слагаемые, получим

$$a_5\left(10^5+10^4+\ldots+1\right)+a_4\left(10^5+10^4+\ldots+1\right)+\ldots+a_0\left(10^5+10^4+\ldots+1\right)=$$
$$=\left(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0\right)\left(10^5+10^4+\ldots+1\right)=18\cdot 111111=1999998$$

4. Решение. Числа $2n+3$ и $5n+6$ имеют одинаковые остатки, если их разность $5n+6-(2n+3)=3n+3$ кратна 6, т.е. $3n+3=6k$. Отсюда получаем $n=2k-1,\ \ k\in\square$.

5. Решение. Докажем, что наибольшая длина стороны квадрата равна 40. Вычислим расстояние от первой до последней прямой из P: $3+1+2+6+3+1+2+6+3+1+2+6+3+1=40.$ Следовательно, больше чем 40 длина стороны квадрата быть не может. С другой стороны, в L расстояние от второй прямой до третьей прямой с конца равно $4+6+2+4+6+2+4+6+2+4=40.$ Это означает, что квадрат со стороной 40 существует.