Ответы и решения

1 Число $x=1$ является корнем многочлена $p(x)$ при любом a:

$p(x)=(x-1)(ax^2+(a+1)x-3)$.

Многочлен $p(x)$ и его производная имеют общий корень, если его кратность не меньше 2.

Случай 1. $x=1$ является корнем многочлена $p_1(x)=ax^2+(a+1)x-3$.

$p_1(1)=a+(a+1)-3=2a-2=0\to a=1$

Случай 2. многочлен $p_1(x)$ имеет кратный корень

$D=(a+1)^2+12a=0\to a^2+14a+1=0\to a=-7\pm3\sqrt{5}$

Ответ: 1) $a=1$, 2) $a=-7\pm3\sqrt{5}$

2 Преобразование:

$$2\sin\frac{x}{2}\sin\left(nx-x/2\right)=0\to\left[\begin{array}{c} x_1=2\pi k,\ k\in Z \\ x(n-0,5)=\pi m\to x_2=\dfrac{\pi}{n-0,5}\cdot m,\ m\in Z\end{array}\right..$$

Серия x_2 имеет период $T=\dfrac{\pi}{n-0,5}$ и, если $T\le\dfrac{\pi}{30}$, то любой отрезок длины $\dfrac{\pi}{3}$ содержит не менее 10 решений уравнения.

$\dfrac{\pi}{n-0,5}\le\dfrac{\pi}{30}\to n\ge30,5$. С учетом цело численности $n\ge31$. Покажем, что для $n=30$ найдется отрезок длины $\dfrac{\pi}{3}$, содержащий 9 решений уравнения. Отрезок $I=\left[\dfrac{\pi}{354};\dfrac{119\pi}{354}\right]$ имеет длину $\dfrac{\pi}{3}$ и не содержит решения серии x_1. Из серии $x_2=\dfrac{\pi}{30-0,5}\cdot m=\dfrac{2\pi}{59}\cdot m=\dfrac{12\pi}{354}\cdot m$ ему принадлежат решения для $m=1,2,3,...,9$, поскольку для $m=10$ решение $\dfrac{120\pi}{354}$ отрезку I не принадлежит.

Ответ: $n\ge31,\ n\in Z$

3 Ограничение: $0\le r\le17$

$$18t+r=15r^2-18r+6\to18t=15r^2-19r+6=(5r-3)(3r-2)\to t=\frac{(5r-3)(3r-2)}{18}\in Z$$

Число $3r-2$ не делится на 3, а значит и на 9. Поэтому на 9 должно делится число $5r-3$:

$$5r-3=9m\to9m-5r=-3\to\begin{cases} m=5u-2 \\ r=9u-3,\ u\in Z\end{cases}$$

Ограничения для u: $0\le9u-3\le17\to1\le u\le2$

Число $t=\dfrac{m(3r-2)}{2}=\dfrac{(5u-2)(27u-11)}{2}$ является целым для обоих допустимых $u=1$ и $u=2$.

Для $u=1$ остаток $r=6$, $m=3,\ t=24,\ a=18\cdot t+6=438$

Для $u=2$ остаток $r=15,\ m=8,\ t=172,\ a=18t+r=3111$

Ответ $a_1=438,\ a_2=3111$

4 Событие A - число b целое

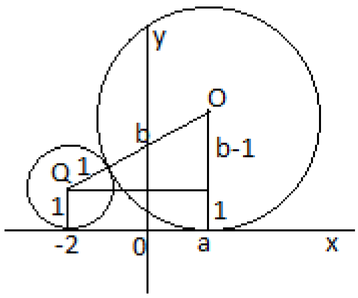
Обозначим $x_i=\begin{cases}1, \text{если } i-\text{ый игрок разделил на 2}\\ -1, \text{если } i-\text{ый игрок умножил на 2}\end{cases}$

Число b целое, если $s=x_1+x_2+x_3+x_4\le 2$. Величина s принимает только четные значения на отрезке $[-4;4]$. Таким образом, событию $\bar{A}$ благоприятствует только один исход: $s=4$

Его вероятность $P(\bar{A})=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$. Тогда $P(A)=\dfrac{15}{16}$.

Ответ: $P(A)=\dfrac{15}{16}$

5



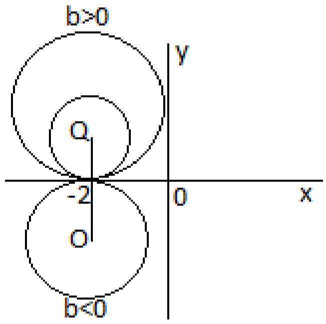
касание

Первое уравнение в системе – уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $Q(-2,1)$. Второе уравнение в системе – уравнение окружности с центром в точке $O(a,b)$ радиуса $|b|$. Единственность решения системы – касание окружностей внешним образом при $a\ne -2$ и внутренним - при $a=-2$. На рис. изображена картинка случая $a\ne -2$.

Вычисления:

$$(a+2)^2+(b-1)^2=(b+1)^2 \to b=\frac{(a+2)^2}{4}$$

Случай $a=-2$.



Касание внутреннее с первой окружностью при $b \in [0;1) \cup (1;+\infty)$. Касание внешнее при $b \in (-\infty;0)$. При $b=0$ система также имеет единственное решение.

Ответ: $b = \dfrac{(a+2)^2}{4}$ при $a \neq -2$. При $a=-2$ любое $b \neq 1$

6 $v_g = \dfrac{a}{3}, v_k = \dfrac{a}{2}$ - скорости движения Гоши и Кеши

$T_m = \dfrac{2a+4am}{v_g} = 6(2m+1),\ m = 0,1,...$ моменты времени, когда Гоша находится в вершине C.

$T_k = \dfrac{3a\sqrt{2}}{v_k}k = 6k\sqrt{2},\ \ k = 1,2,...$ - моменты времени, когда Кеша находится в вершине C.

Если бы они встретились в вершине C, а другого места встречи в условиях не предусмотрено, то при каких то целых k и m : $T_m = T_k \to 6k\sqrt{2} = 6(2m+1) \to \sqrt{2} = \dfrac{2m+1}{k}$. Последнее невозможно, поскольку $\sqrt{2}$ - число иррациональное.

Пусть в момент времени T_k Кеша находится в вершине C, а Гоша удален от него на расстояние не большее $a/10$, то $|T_m - T_k| \cdot v_g \le \dfrac{a}{10} \to \left|k\sqrt{2} - (2m+1)\right| \le 0,05$. Необходимо найти наименьшее k, при котором возможно выполнение неравенства при целом m. Ниже приведены результаты вычислений $k\sqrt{2}, m$ и $\Delta = \left|k\sqrt{2} - (2m+1)\right|$ для $k = 2,3,...,12$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k\sqrt{2}$	2.828	4.247	5.657	7.071	8.485	9.899	11.31	12.728	14.142	15.556	16.97
m	1	2	2	3	4	4	5	6	7	7	8
Δ	0,17	0,75	0,66	0,07	0,51	0,89	0,31	0,27	0,85	0,55	0,03

Наименьшее допустимое $k=12$, $T_{\min} = T_{12} = 72\sqrt{2}$

Ответ: $T_{\min} = T_{12} = 72\sqrt{2}$

Ответы и решения

1 Условие задачи: $\begin{cases} a^3+ab+c=0 & (1) \\ ab^2+b^2+c=0 & (2) \\ ac^2+bc+c=0 & (3) \end{cases}$

Уравнение (3), записанное в виде $c(ac+b+1)=0$, приводит к двум случаям.

Случай 1. $c=0$

Уравнения (1) и (2) примут вид: $\begin{cases} a(a^2+b)=0 \\ b^2(a+1)=0 \end{cases}$ и при $a\neq 0$ имеют решение

$\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \to p_1(x)=-x^2-x \\ c=0 \end{cases}$ - совершенный многочлен

Случай 2. $c\neq 0$

Вычитая из (1) уравнение(2) и из (2) уравнение (3), получим

$$\begin{cases} a(a^2-b^2)+b(a-b)=0 \\ a(b^2-c^2)+b(b-c)=0 \\ ac+b+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} (a-b)\big(a(a+b)+b\big)=0 \\ (b-c)\big(a(b+c)+b\big)=0 \\ ac+b+1=0 \end{cases}$$

Случай 2.1 $a=b\neq 0$

В этом случае $b\neq c$, поскольку в противном $a=b=c$ и уравнение (3) решений не имеет.

Тогда система примет вид $\begin{cases} a(a+c)+a=0 \\ ac+a+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+c+1=0 \\ ac+a+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+c+1=0 \\ c(a-1)=0 \end{cases} \to a=1, b=1, c=-2$

и $p_2(x)=x^2+x-2$ - совершенный многочлен.

Случай 2.2 $b=c\neq a$

Система примет вид: $\begin{cases} a(a+b)+b=0 \\ ab+b+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a^2-1=0 \\ ab+b+1=0 \end{cases} \to a=1, b=c=-\frac{1}{2}$, $p_3(x)=x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ - совершенный многочлен.

Случай 2.3 $a\neq b, b\neq c$

Система примет вид: $\begin{cases} a(a+b)+b=0 \\ a(b+c)+b=0 \\ ac+b+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a(a-c)=0 \\ ab=1 \\ ac+b+1=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=c\neq 0 \\ b=1/a \\ a^2+1/a+1=0 \to a^3+a+1=0 \ (*) \end{cases}$

Уравнение имеет единственное, отрицательное решение a^*, поскольку функция в левой части уравнения (*) монотонная. Этому значению $a^*<0$ соответствует $b^*=\frac{1}{a^*}$, $c^*=a^*$ и совершенный многочлен $p_4(x)=a^*x^2+b^*x+c^*$. Таким образом, всего имеется четыре совершенных многочлена второй степени, два из которых $p_2(x)=x^2+x-2$ и $p_3(x)=x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ имеют положительный коэффициент при старшей степени.

Ответ: 1) четыре совершенных многочлена; 2) $p_2(x)=x^2+x-2$ и $p_3(x)=x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

2 Преобразование:

$$\cos\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sin mx\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos mx\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+\cos mx)\right)=\cos\left(\pi\cos^2\frac{mx}{2}\right)$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\sin mx=\pm\pi\cos^2\frac{mx}{2}+2\pi k\to\sqrt{3}\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}=\pm\cos^2\frac{mx}{2}+2k,\ k\in Z$$

Поскольку абсолютное значение левой части равенства не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ уравнение имеет решения только при $k=0$.

Случай 1 (уравнение со знаком +)

$$\left[\begin{array}{c}\cos\frac{mx}{2}=0\to\frac{mx}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (*)\\ \sqrt{3}\sin\frac{mx}{2}-\cos\frac{mx}{2}=0\to tg\frac{mx}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\to\frac{mx}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k\ (**)\end{array}\right.$$

Случай 2 (уравнение со знаком -)

Помимо (*) добавляется $\sqrt{3}\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}=0\to tg\frac{mx}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\to\frac{mx}{2}=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ (***)

Подставляем в (*) $x=\frac{\pi}{3}$: $\frac{m\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k\to m=6k+3,\ k\in Z$

Подставляем в (**) $x=\frac{\pi}{3}$: $\frac{m\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\pi k\to m=6k+1,\ k\in Z$

Подставляем в (***) $x=\frac{\pi}{3}$: $\frac{m\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\pi k\to m=6k-1,\ k\in Z$

Ответ: $m=6k\pm1,\ m=6k+3,\ k\in Z$

3 1) Произведение всех делителей, у которых показатель степени 2 равен 0, показатель степени 3 равен 0, показатель степени 5 равен $k=0,1,2,...,r$, равно $5^{1+2+...+r}=5^{S_r}$.

2) Произведение всех делителей, у которых показатель степени 2 равен 0, показатель степени 3 равен 1, показатель степени 5 равен $k=0,1,2,...,r$, равно $3^{(r+1)}\cdot 5^{S_r}$.

3) Произведение всех делителей, у которых показатель степени 2 равен 0, показатель степени 3 равен 2, показатель степени 5 равен $k=0,1,2,...,r$, равно $3^{2(r+1)}\cdot 5^{S_r}$ и т.д.

4) Наконец, произведение всех делителей, у которых показатель степени 2 равен 0, показатель степени 3 равен q, показатель степени 5 равен $k=0,1,2,...,r$, равно $3^{q(r+1)}\cdot 5^{S_r}$.

Тогда произведение всех делителей, у которых показатель степени 2 равен 0, показатель степени 3 равен $m=0,1,...,q$, показатель степени 5, равен $k=0,1,2,...,r$, равно $3^{(r+1)S_q}\cdot 5^{(q+1)S_r}=u$.

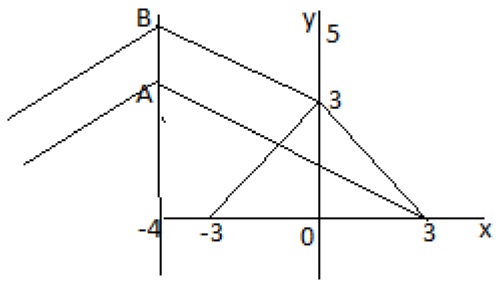
5) Произведение всех делителей числа a, для которых показатель степени числа 2 равен $n=1$, а показатели степеней 3 и 5 равны $m=0,1,...,q$ и $k=0,1,2,...,r$, равно $2^{(r+1)}\cdot u^{(q+1)}$, для показателя степени числа 2 равного $n=2$ и любых показателей $m=0,1,...,q$ и $k=0,1,2,...,r$ чисел 3 и 5, произведение всех делителей числа a равно $2^{2(r+1)}\cdot u^{(q+1)}$ и т.д.

Для показателя степени числа 2 равного $n=s$ и любых показателей $m=0,1,...,q$ и $k=0,1,2,...,r$ чисел 3 и 5, произведение всех делителей числа a равно $2^{s(r+1)}\cdot u^{(q+1)}$

Тогда произведение всех делителей для показателей степеней $s=0,1,2,...,p$, $m=0,1,...,q$ и $k=0,1,2,...,r$ равно $2^{(r+1)(q+1)S_p}\cdot u^{(p+1)}=2^{(r+1)(q+1)S_p}\cdot 3^{(r+1)(p+1)S_q}\cdot 5^{(p+1)(q+1)S_r}$

Ответ $2^{90}\cdot 3^{120}\cdot 5^{60}$

4.



Прямая $2y+(x+4)=2a$ пересекает прямую $-x+y=3$ в точке с абсциссой $x=\dfrac{2a-10}{3}$. С учетом принадлежности $x\in[-3;0]$ это бывает при $a\in\left[\dfrac{1}{2};5\right]$. Прямая $2y+(x+4)=2a$ пересекает прямую $x+y=3$ в точке с абсциссой $x=10-2a$. С учетом принадлежности $x\in[0;3]$ это бывает при $a\in\left[\dfrac{7}{2};5\right]$. Следовательно, система имеет два решения при $a\in\left[\dfrac{7}{2};5\right)$. Вероятность этого события, следуя логике равномерного закона, равна отношению длины отрезка $\left[\frac{7}{2};5\right]$ к длине отрезка $[-1;5]$,т.е. $P(A)=\frac{1}{4}$.

Ответ: $P(A)=\frac{1}{4}$

5. Произвольная точка N прямой имеет координаты $(t;-2-t),\ t\in R$. Произвольная точка M параболы имеет координаты $(x;x^2-4x+5),\ x\in R$. Квадрат расстояния между точками M и N равен $\rho^2(x,t)=(x-t)^2+(x^2-4x+7+t)^2$. Найдем координаты точек M и N , при которых ρ^2 принимает минимальное возможное значение.

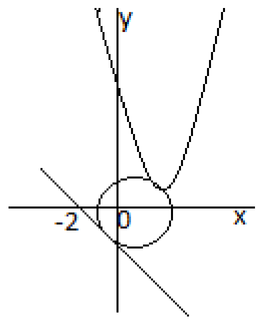
При фиксированной точке M $\rho^2(t)$ зависит от t и поэтому в точке минимума ее производная по переменной t равна нулю $-2(x-t)+2(x^2-4x+7+t)=0$ (*) . Для фиксированной точки N функция $\rho^2(x)$ зависит от x и в точке минимума ее производная по x равна нулю $2(x-t)+2(x^2-4x+7+t)(2x-4)=0$ (**) .

Решаем систему (*), (**):

$$\begin{cases} 2(x^2-4x+7+t)(2x-3)=0 \\ 4(x-t)+2(x^2-4x+7+t)(2x-5)=0 \end{cases}$$

Случай 1. $x=3/2$

Тогда, подставляя значение $x=3/2$ во второе уравнение, получим $t=-\frac{7}{8}$. Критические точки $N^*\left(-\frac{7}{8};-\frac{9}{8}\right)$ и $M^*\left(\frac{3}{2};\frac{5}{4}\right)$. Расстояние между точками M^* и N^* равно $\frac{19\sqrt{2}}{8}$. Если $2r\le\frac{19\sqrt{2}}{8}$, то окружность не пересекает параболы (касается в точках M^* и N^*)



Случай 2. $x\neq 3/2$

Тогда $(x^2-4x+7+t)=0$ и из второго уравнения $x=t$. Подставляя $x=t$ в уравнение $(x^2-4x+7+t)=0$, получим условие на t, т.е. $t^2-3t+7=0$. Поскольку последнее уравнение решений не имеет, случай 2 не реализуем. $r_{\max}=\dfrac{19\sqrt{2}}{16}$

Ответ: $r_{\max}=\dfrac{19\sqrt{2}}{16}$

Задача 6 Ответ: $l_{\max}=\dfrac{4b^2+a^2}{4b}=\dfrac{10}{3}$

Вариант 0

В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=a, BC=b, a<b$ расположена полуокружность K с диаметром AB. Прямая L касается полуокружности K. Найти максимальную возможную длину отрезка прямой L, расположенного в прямоугольнике $ABCD$.

Ответ: $l_{\max}=\dfrac{4b^2+a^2}{4b}$

Решение

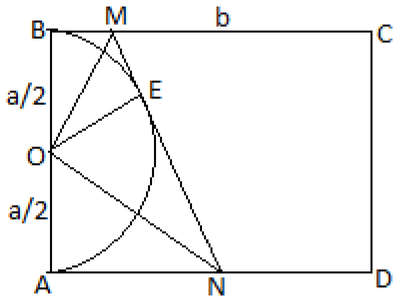


Рис 1

$MN-$ отрезок прямой L, $E-$ точка касания, $\angle BOE=\alpha$, $\angle BOM=\angle MOE=\dfrac{\alpha}{2}$, $BM=ME$,

$\angle ONA=\angle ONE=\dfrac{\alpha}{2}$, $AN=NE$. $MN=ME+NE=BM+AN=\dfrac{a}{2}\left(tg\dfrac{\alpha}{2}+ctg\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Если прямая L проходит через вершину D, то $AN=AD=b\to\dfrac{a}{2}ctg\dfrac{\tilde{\alpha}}{2}=b\to tg\dfrac{\tilde{\alpha}}{2}=\dfrac{a}{2b}$.

Случай 1. $\alpha\in\left[\tilde{\alpha};\pi/2\right]$ (рис 1)

Обозначение: $t=tg\dfrac{\alpha}{2}\in\left[\dfrac{a}{2b};1\right]$

Функция $l_1(t)=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ убывает на отрезке $\left[\dfrac{a}{2b};1\right]$, поэтому $l_{1,\max}=l\left(\dfrac{a}{2b}\right)=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{a}{2b}+\dfrac{2b}{a}\right)=\dfrac{4b^2+a^2}{4b}$

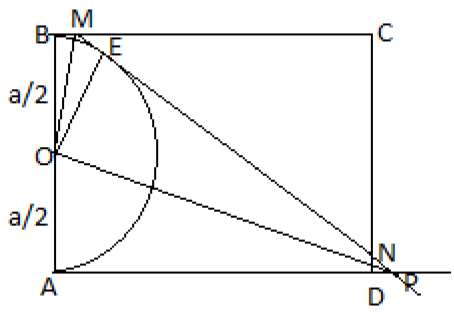


Рис 2

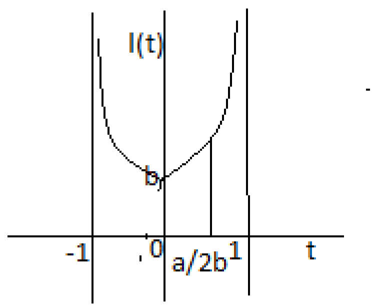
Случай 2. $\alpha \in [0;\tilde{\alpha}]$ (рис 2), точка N лежит на стороне CD.

$$\angle CMN = \alpha,\ BM = \frac{a}{2} tg\frac{\alpha}{2},\ MC = b - BM = b - \frac{a}{2} tg\frac{\alpha}{2},\ MN = \frac{MC}{\cos\alpha} = \left(b - \frac{a}{2} tg\frac{\alpha}{2}\right) / \cos\alpha$$

Обозначение: $t = tg\frac{\alpha}{2} \in \left[0;\frac{a}{2b}\right], \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ Функция

$$l_2(t) = \left(b - \frac{at}{2}\right)\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{(2b-at)(1+t^2)}{2(1-t^2)},\ t \in \left[0;\frac{a}{2b}\right]$$

Эскиз графика функции $l_2(t)$ на отрезке $\left[0;\frac{a}{2b}\right]$ изображен на рис 3



Она возрастает на отрезке, поэтому $l_{2,\max} = l_2\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{\left(2b - \frac{a^2}{2b}\right)\left(1 + \frac{a^2}{4b^2}\right)}{2\left(1 - \frac{a^2}{4b^2}\right)} = \frac{4b^2 + a^2}{4b}$.

Ответы и решения

1. Многочлен $p_1 = x - a$ может иметь корень $x = a$ совпадающий с одним из корней произведения $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$.

Случай 1 $a = 1$

Тогда многочлен $p_2(x) = (x-1)^r (x-2)^s (x+3)^t$, где $r \ge 1, s \ge 1, t \ge 1 -$ целые числа, $r + s + t = 4$, удовлетворяет условию задачи. Многочлен суммы $p_1(x) + p_2(x)$ имеет свободный член $u = (-1)^{r+s} \cdot 2^s \cdot 3^t - 1 = (-1)^t \cdot 2^s \cdot 3^t - 1$ имеет максимальное значение $u_{\max} = 17$ при $r = 1, s = 1, t = 2$.

Случай 2 $a = 2$

Тогда многочлен $p_2(x) = (x-1)^r (x-2)^s (x+3)^t$ и многочлен $p_1(x) + p_2(x)$ имеет свободный $u = (-1)^{r+s} \cdot 2^s \cdot 3^t - 2 = (-1)^t \cdot 2^s \cdot 3^t - 2$, принимающий максимальное значение $u_{\max} = 16$ при $r = 1, s = 1, t = 2$.

Случай 3 $a = -3$

Свободный член $u = (-1)^{r+s} \cdot 2^s \cdot 3^t + 3$ принимает максимальное значение $u_{\max} = 21$ при $s = r = 1, t = 2$

Искомый многочлены: $p_2(x) = (x-1)(x-2)(x+3)^2$, $p_1(x) = x + 3$

Ответ: $p_1(x) = x + 3,\ p_2(x) = (x-1)(x-2)(x+3)^2$; $a_0 = 21$

2. Преобразование:

$$\sin \pi x \ge -2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{8}$$

Найдем множество значений многочлена $P(x) = -2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{8}$ на полуоси $x \le 1$.

Критические точки:

$$P'(x) = -6x^2 + 11x - 4 = 0 \to x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{4}{3}$$

$P(x)$ убывает на полуоси $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ и возрастает отрезке $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Поэтому $P(x)$ принимает минимальное значение в точке $x = \frac{1}{2}$, равное $P\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Тогда $\sin \pi x \ge -2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{8} \ge 1$ для всех $x \le 1$. Решение возможно только при знаке равенства, т.е. $x = \frac{1}{2}$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$

3. Разложение на простые делители $15000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$

Решение уравнения: $6x^2-5xy+y^2=(2x-y)(3x-y)=0\to\left[\begin{array}{l}y=2x\\y=3x\end{array}\right.$

Случай 1. $y=2x$

$2x+3y=2x+6x=8x$. Наибольший делитель x, при котором $y=2x$ также является делителем равен $x_1=2^2\cdot3\cdot5^4$ и значение выражения $p_1=8x_1=2^5\cdot3\cdot5^4$

Случай 2. $y=3x$

$2x+3y=2x+9x=11x$. Наибольший делитель x, при котором $y=3x$ также является делителем равен $x_2=2^3\cdot5^4$ и значение выражения $p_2=11x_2=11\cdot2^3\cdot5^4$.

Сравнение p_1 и p_2:

$$p_1-p_2=2^5\cdot3\cdot5^4-11\cdot2^3\cdot5^4=5^4\cdot2^3\cdot(12-11)>0$$

Ответ: $p_{\max}=2^5\cdot3\cdot5^4=60000$

4. Дискриминант $D=(1-\xi)^2+4\xi(\xi+2)=0\to5\xi^2+6\xi+1=0\to\left[\begin{array}{l}\xi=-1\\\xi=-1/5\end{array}\right.$

Вероятность того, что ξ принимает одно из значений -1 или $-1/5$ равна $P(A)=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{16}$.

Ответ: $P(A)=\dfrac{7}{16}$

5. Если x_n арифметическая прогрессия, то $x_n=b+(c-b)(n-1)$. Тогда $x_{n+1}=b+(c-b)n,\quad x_{n+2}=b+(c-b)(n+1)$. Подставим эти выражения в условие:

$$b+(c-b)(n+1)=3\big(b+(c-b)n\big)-2\big(b+(c-b)(n-1)\big)+a\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(c-b)(n+1-3n+2(n-1))+a=0\to a=(c-b)<0$$

Если x_n- геометрическая прогрессия, то $x_n=b\cdot q^{n-1}$, $x_{n+1}=b\cdot q^n$, $x_{n+2}=b\cdot q^{n+1}$. Подставляем полученные выражения в условие:

$$bq^{n+1}=3bq^n-2bq^{n-1}+a\to b\cdot q^{n-1}\left(q^2-3q+2\right)=a$$

Независимость a от n возможна при $q=1$ или $q=2$, при этом $a=0$. При $q=1$ прогрессия не может быть возрастающей. При $q=2$ прогрессия x_n возрастающая при $c=2b>0$

Ответ: 1) $a=c-b$, для любых $b>c$ 2) $a=0$, $c=2b>0$

6.

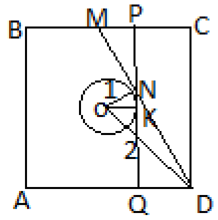


Рис 1

$DM-$ касательная, проведенная из вершины D, $ON-$ перпендикуляр из точки o на DM, $PQ-$ касательная к окружности, параллельная стороне DC, $OK-$ перпендикуляр к PQ,

$OD=2, ON=1$ по условию, $\angle ODN=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle NOK=\angle MDC=\dfrac{\pi}{12}$

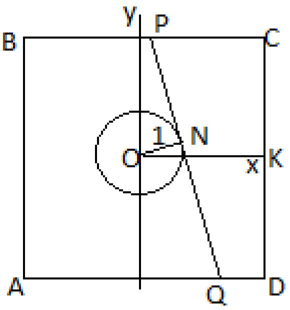


Рис 2

Пусть PQ - произвольная касательная, ON составляет угол $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$. В системе координат XOY с центром в точке O уравнение прямой PQ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$, а площадь трапеции $QPCD$ равна

$$S_1(\alpha)=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\frac{1-y\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)dy=4-\frac{2\sqrt{2}}{\cos\alpha}$$

Функция $S_1(\alpha)$ монотонно убывает на отрезке $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$ и $S_{1,\min}=4-\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\pi/12}$. Заметим, что отношение $S_1(\alpha):(8-S_1(\alpha))$ минимальное, если минимальное значение принимает $S_1(\alpha)$.

Действительно, $\left(\dfrac{S_1(\alpha)}{8-S_1(\alpha)}\right)'=\dfrac{8S_1'(\alpha)}{(8-S_1(\alpha))^2}$ и знаки производной отношения и производной $S_1'(\alpha)$ совпадают.

Если $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12}\right]$, прямая отсекает от квадрата треугольник.

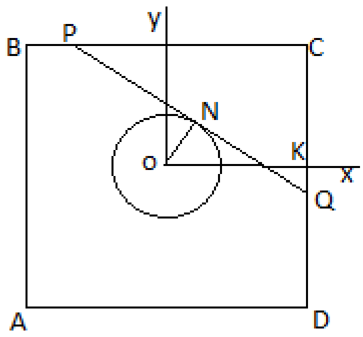


Рис 2

Уравнение прямой PQ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$, координаты точки $P\left(\dfrac{1-\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha};\sqrt{2}\right)$, координаты точки $Q\left(\sqrt{2};\dfrac{1-\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. Длина катета $PC = \sqrt{2} - \dfrac{1-\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-1}{\cos\alpha}$, длина катета $QC = \sqrt{2} - \dfrac{1-\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-1}{\sin\alpha}$. Тогда площадь треугольника PCQ равна

$$S_2(\alpha) = \frac{\left(\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-1\right)^2}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Ее производная (после преобразования) имеет вид:

$$S_2'(\alpha) = \frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-1\right)\left(\sqrt{2}+(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)}{\sin^2 2\alpha}$$

Функция $S_2(\alpha)$ на отрезке $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{12};\dfrac{5\pi}{12}\right]$ имеет только одну критическую точку $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (минимум).

По симметрии, поведение функции $S_2(\alpha)$ на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{12};\dfrac{\pi}{2}\right]$ такое же, как на отрезке $\alpha \in \left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$

Таким образом, минимальное значение $S_{1,\min} = S_2(\pi/4) = 1$ и $(S_1 : S_2)_{\min} = 1:7$

Ответ: $(S_1 : S_2)_{\min} = 1:7$

Ответы и решения

1. Из условия $\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)' = 2x \to p_2(x) = (x^2+c)p_1(x)$, $p_1 + p_2 = p_1(x)(x^2+c+1) = (x-1)(x+2)(x^2-3)$

Поскольку $p_1(x) -$ многочлен, возможны два варианта

Случай 1

$(x^2+c+1) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ невозможен

Случай 2

$(x^2+c+1) = x^2 - 3 \to c = -4$. Тогда $p_1 = (x-1)(x+2)$ и $p_2 = (x^2-4)(x-1)(x+2)$

Ответ: $p_1 = (x-1)(x+2)$, $p_2 = (x^2-4)(x-1)(x+2)$

2. $\sin\left(4\pi(2k+1)/7\right) = 0 \to 7m = 8k+4, m \in Z \to \begin{cases} k = -4+7t \\ m = -4+8t, t \in Z \end{cases}$

$\sin\left(4\pi(3k-2)/7\right) = 0 \to 7n = 12k-8, m \in Z \to \begin{cases} k = 3+7s \\ m = 4+12s, s \in Z \end{cases}$

Наконец, уравнение $7t - 4 = 7s + 3 \to t = s+1$. Тогда $k = 3+7s$

Ответ: $k = 3+7s, s \in Z$

3. Найдем все взаимно простые тройки $x, y, (x+y)$ делителей числа $a = 1944 = 2^3 \cdot 3^5$. Заметим, что если $p > 1$ делитель x и y , то p делит $x+y$. Аналогично, если $p > 1$ делитель x и $x+y$, то он делит y и любой делитель $p > 1$ пары y и $x+y$ делит x .Таким образом, числа $x, y, (x+y)$ имеют различные элементарные делители, кроме единиц. Поскольку таких делителей только два, а именно 2 и 3 , а чисел три, то одно из их них единица ($x+y \neq 1$)

Случай 1. $x = 1, y = 2m, x+y = y+1 = 3n, n, m \in Z, m \geq 1, n \geq 1$

Тогда $3n - 2m = 1 \to \begin{cases} n = 1+2s \\ m = 1+3s \end{cases}, s \in Z \to \begin{cases} y = 6s+2 \\ x+y = 6s+3 \end{cases}$. В этом случае, y может содержать только степени двойки, т.е. $y = 2, 4, 8$,а $x+y -$ степени тройки, т.е. $x+y = 3, 9, 27, 81$. Последнее возможно при $s = 0$ и $s = 1$.

Первое решение $x = 1, y = 2, x+y = 3$. Эта тройка взаимно простых делителей числа $a = 1944 = 2^3 \cdot 3^5$ порождает тройки $x = t, y = 2t, x+y = 3t$, где $t -$ любой из делителей числа, где $b = 324 = 2^2 3^4$. Наибольшим таким делителем является $t = 324$ и $x \cdot y \cdot (x+y)_{\max} = 6 \cdot 324^3 = 2^7 \cdot 3^{13}$.

Второе решение $x = 1, y = 8, x+y = 9$ породит тройки $x = t, y = 8t, x+y = 9t$, где $t -$ любой из делителей числа, где $c = 27 = 3^3$. Наибольшим делителем является $t = 27$, поэтому $x \cdot y \cdot (x+y)_{\max} = 72 \cdot 27^3 = 2^3 \cdot 3^{11}$

Случай 2. $x=1,\ y=3m,\ x+y=y+1=2n,\ m,n\in Z, m\geq 1, n\geq 1$

$2n-3m=1\to\begin{cases} n=3s+2 \\ m=2s+1 \end{cases}\to\begin{cases} y=6s+3 \\ x+y=6s+4 \end{cases}$. Возможные значения для $y=3,9,27,81$,

для $x+y=y+1=2,4,8$. Имеется только одно решение, соответствующее значению $s=0\to x=1, y=3, x+y=4$. Эта взаимно простая тройка порождает допустимые тройки $x=t, y=3t, x+y=4t$. где $t-$ любой из делителей числа $d=162=2\cdot 3^4$. Максимальному делителю $t=162$ соответствует максимальное произведение $x\cdot y\cdot(x+y)_{\max}=12\cdot 162^3=2^5\cdot 3^{13}$

Случай 3. $x=1, y=1, x+y=2$

Этой взаимно простой тройке соответствуют допустимые тройки $x=t, y=t, x+y=2t$, где $t-$ любой из делителей числа $e=972=2^2\cdot 3^5$. Максимальному делителю $t=972$ соответствует максимальное произведение $x\cdot y\cdot(x+y)_{\max}=2\cdot 972^3=2^7\cdot 3^{15}$.

Числа x и y входят в условие симметрично, поэтому случаи с $y=1$ новых произведений троек $xy(x+y)$ не создают.

Ответ: $x\cdot y\cdot(x+y)_{\max}=2\cdot 972^3=2^7\cdot 3^{15}$

4. Поскольку $1/3<3/8$ допустимыми событиями являются $\xi=4$ или $\xi=9$.

Случай 1. $\xi=4$

Преобразование уравнения:

$$4ax^2-16x+a4=0\to ax^2-4x+a=0\to a(x^2+1)=4x\to a=\frac{4x}{x^2+1}$$

Производная функции $a=\dfrac{4x}{x^2+1}$ равна $a'=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\leq 0$ на отрезке $[1;2]$, поэтому множество значений a, при которых уравнение имеет на отрезке $[1;2]$ хотя бы одно решение представляет собой отрезок $[a(2);a(1)]=[8/5;2]$.

Случай 2. $\xi=9$

Преобразование уравнения:

$$4ax^2-36x+9a=0\to a=\frac{36x}{4x^2+9}$$

Производная функции $a = \dfrac{36x}{4x^2+9}$, равная $a' = \dfrac{36(9-4x^2)}{(4x^2+9)^2}$, положительна отрезке $[1;3/2]$ и отрицательна на отрезке $[3/2;2]$. Область значений функции $a = \dfrac{36x}{4x^2+9}$ на отрезке $[1;2]$ равна $[a(1);a(3/2)] = \left[\dfrac{36}{13};3\right]$. Объединяя случаи 1 и 2, получим $a \in [8/5;2] \cup [36/13;3]$.

Ответ: $a \in [8/5;2] \cup [36/13;3]$

5. Выразим y из уравнения прямой $y-1 = \dfrac{4-ax-b}{b}$ и подставим в уравнение окружности:

$b^2(x-1)^2 + (ax+b-4)^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(a^2+b^2) + 2x(a(b-4)-b^2) + (b-4)^2 = 0$

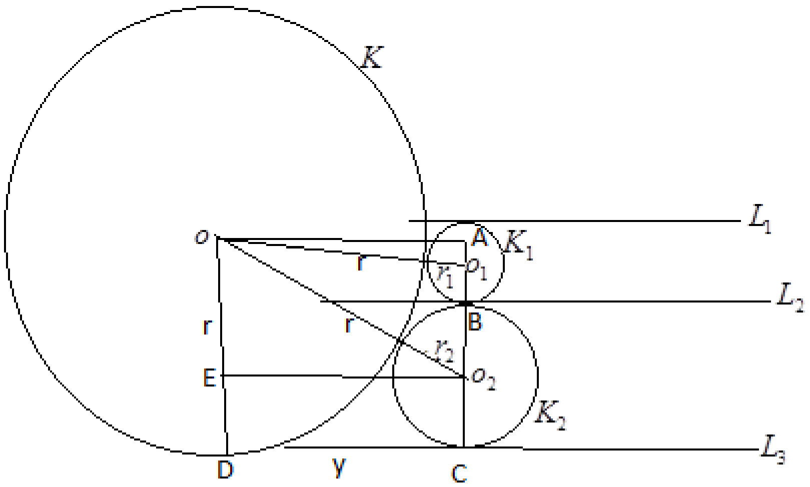
Условие касания прямой и окружности $D = 0 \to \left(a(b-4)-b^2\right)^2 - (a^2+b^2)(b-4)^2 = 0$

После преобразования $4a+4b-ab-8=0 \to a = \dfrac{4b-8}{b-4} = 4 + \dfrac{8}{b-4}$

Для целочисленности a число $b-4$ должно быть делителем числа 8, т.е. $b-4 = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$.

$b-4$	1	-1	2	-2	4	-4	8	-8
a	12	-4	8	0	6	2	5	3
b	5	3	6	2	8	0	12	-4

Ответ: 8 пар $(a;b) = (12;5),(8,6),(2;0),(-4;3),(5;12),(6;8),(0;2),(3;-4)$



6.

На рис изображена окружность K, касающаяся прямой L_3 ($d_1 < d_2$). Радиусы окружностей K_1, K_2 и K обозначены через $r_1 = \dfrac{d_1}{2}, r_2 = \dfrac{d_2}{2}$ и r. Их центры - o_1, o_2 и o. B, C и D - точки касания окружностей с прямыми, oA, Eo_2 параллельны прямым, а oD, AC - им перпендикулярны.

Длины отрезков $oA = CD = o_2E = y$. С учетом внешнего касания, из треугольников oo_2E и oo_1A следуют соотношения:

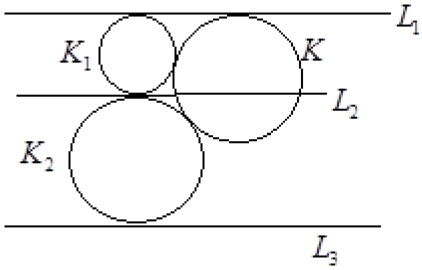
$$\begin{cases} (r+r_1)^2 = (r-2r_2-r_1)^2 + y^2 \\ (r+r_2)^2 = (r-r_2)^2 + y^2 \end{cases}$$

Вычитая одно из другого, получим

$$(r_2 - r_1)(2r + r_1 + r_2) = (r_2 + r_1)(2r - 3r_2 - r_1) \to 4r \cdot r_1 = (r_2 - r_1)(r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)(3r_2 + r_1) =$$

$$= 4(r_2 + r_1)r_2 \to r = \frac{(r_2 + r_1)r_2}{r_1} = \frac{(d_1 + d_2) \cdot d_2}{2d_1}$$

Второй случай касания окружности K прямой L_1



Приводит к симметричному ответу $r = \dfrac{(d_1 + d_2) \cdot d_1}{2d_2}$

Ответ: 1) $r = \dfrac{(d_1 + d_2) \cdot d_2}{2d_1} = 3$, 2) $r = \dfrac{(d_1 + d_2) \cdot d_1}{2d_2} = \dfrac{3}{4}$