Ответы и решения

1. Ответ: $1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}=\frac{2648}{2145}$

Решение

Определение прогрессии: $p_n(2)=8a_n-4(a_n+1)-2(6a_n-1)+6=-8a_n+4=-4-16n\to a_n=1+2n$

Разложение многочлена $p_n(x)$ на множители:

Проверка делителей свободного члена:

$p_n(-2)=-8a_n-4(a_n+1)+2(6a_n-1)+6=0$, т.е. $x=-2$ является корнем многочлена при всех n.

$p_n(3)=27a_n-9(a_n+1)+3(1-6a_n)+6=0$, т.е. $x=3$ является корнем многочлена при всех n.

Тогда $p_n(x)=(a_nx-1)(x+2)(x-3)$.

Многочлены $p_5(x), p_6(x)$ и $p_7(x)$, помимо корней $x=-2$, $x=3$, имеют корни $x=\frac{1}{a_5}=\frac{1}{11}, x=\frac{1}{a_6}=\frac{1}{13}, x=\frac{1}{a_7}=\frac{1}{15}$ соответственно. Тогда искомая сумма корней равна $1+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}=\frac{2648}{2145}$

2. Ответ: 1) $x_n=\frac{3(2^n-1)}{2^n}$ б 2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$

Вариант 0

Для каждого натурального числа n написать формулу для решения x_n уравнения $F_n(x)=\underbrace{f(f(f...(f(x))...)}_{n}=0$, где функция $F_n(x)$ является $n-$кратной композицией функции $f(x)=ax+b, |a|>1$. Например, $F_2(x)=f(f(x))$ и т.д. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Ответ: 1) $x_n=-\frac{b(a^n-1)}{a^n(a-1)}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\frac{b}{a-1}$

Решение.

$$F_1(x)=ax+b, F_2(x)=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1),$$
$$F_3(x)=a\left(a^2x+b(a+1)\right)+b=a^3x+b(a^2+a+1),...,$$
$$F_n(x)=a^nx+b\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+1\right)=a^nx+b\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

Уравнение $F_n(x)=0$ имеет решение $x_n=-\frac{b(a^n-1)}{a^n(a-1)}$. При $|a|>1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\frac{b}{a-1}$

3. Ответ $M(1;0,5)$

Решение. Квадрат расстояния точки $M(x;y)$ до начала координат равен $x^2+y^2=x^2+\left(x^2-4x+3,5\right)^2$. Найдем критические точки этой функции $2x+4\left(x^2-4x+3,5\right)(x-2)=0 \to x^3-6x^2+12x-7=0 \to (x-1)(x^2-5x+7)=0$.

Функция имеет минимум в точке $x=1$. Соответствующая ордината равна $y(1)=0,5$.

4. Ответ: 1) $n=-4+24t$ 2) $n=-8+24t$, $t\in Z$

Решение.

Обозначение: $t=\sin\frac{5\pi n}{12}$

Исследование функции $f(t)=6t+(3t-4t^3)=9t-4t^3,\ t\in[-1;1]$

Критические точки:

$f'(t)=9-12t^2=0 \to \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$. В точке $t=t_1$ локальный максимум, в точке $t=t_2$ - локальный минимум, $f(-1)=-5,\ \ f(1)=5,\ \ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}>5$

Условия на n: $t=\sin\frac{5\pi n}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}\to\left[\begin{array}{l} \frac{5\pi n}{12}=\frac{\pi}{3}+2\pi k\to 5n-24k=4\ \ (*) \\ \frac{5\pi n}{12}=\frac{2\pi}{3}+2\pi k\to 5n-24k=8\ \ (**) \end{array}\right.$

Решение диафантового уравнения (*):

$$\begin{cases} n=-4+24t \\ k=-1+5t,\ t\in Z \end{cases}$$

Решение диафантового уравнения (**):

$$\begin{cases} n=-8+24t \\ k=-2+5t,\ t\in Z \end{cases}$$

5. Ответ: $d_{\min}=\frac{r-l}{2}=1$

Решение

Траектории середин отрезков MN и PQ при обходе его концов границы квадрата изображены на рис.1 и 2:

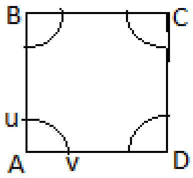

Рис 1

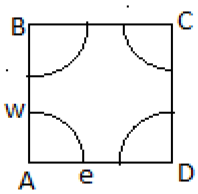

Рис 2

Они представляют собой объединение четвертей окружностей, радиусов $l/2$ и $r/2$ соответственно и отрезков на сторонах квадрата.

Если середины обоих отрезков находятся на окружностях с центром в одной вершине, например, в A, то минимум расстояния между их серединами равен $d_{\min} = \dfrac{r-l}{2}$ (параллельные отрезки)

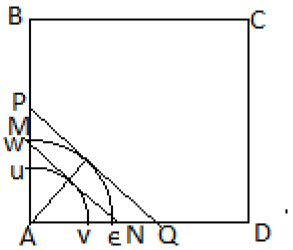

Рис 3

Если середины отрезков находятся на окружностях с центрами в смежных вершинах квадрата,

Рис 4

то расстояние d между серединами отрезков $d \geq a - \dfrac{r+l}{2} > \dfrac{r-l}{2} = d_{\min}$.

Если середина одного отрезка находится на стороне AD, а середина другого – на окружности,

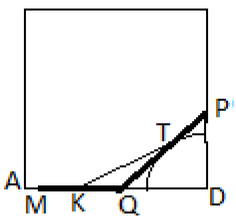

Рис 5

то по неравенству треугольника $KT \geq |KQ - QT| = \dfrac{r-l}{2} = d_{\min}$

Наконец, если середины отрезков принадлежат окружностям с центрами в противоположных вершинах

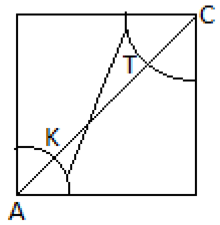

Рис 6

Расстояние между центрами отрезков $KT \geq a\sqrt{2} - \frac{r+l}{2} \geq \frac{r-l}{2} = d_{\min}$