2.16. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

1. (2 балла) Найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 - действительные корни уравнения $4x^2 + 4(a+2)x + 6a + 7 = 0$.

2. (2 балла) На координатной плоскости расположен параллелограмм так, что

1) координаты его вершин являются решениями системы $\begin{cases} \sin 2x = \cos y \\ \cos 2y = \sin(x+y) \end{cases}$;

2) координаты точек на сторонах параллелограмма являются решениями объединения $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \cos y \\ \cos 2y = \sin(x+y) \end{array}\right.$. Найти наименьшее возможное значение площади параллелограмма.

3. (2 балла) При каких натуральных числах n неравенство $x^2 + a_n x + 4a_n - 16 \le 0$ справедливо для всех $x \in [-3;17]$, где a_n – члены арифметической прогрессии, для которой $\begin{cases} a_3 + a_5 = -34 \\ a_{12} - a_7 = -20 \end{cases}$?

4. (2 балла) При каких целых a система $\begin{cases} 1 \le x \le 5,\ 2 \le y \le 5 \\ 2x - 3y = a \end{cases}$ имеет максимально возможное число решений $(x;y)$ с целыми x и y?

5. (2 балла) Окружности K_1, K_2, K_3 с радиусами $1, 2$ и 3 соответственно, попарно касаются друг друга внешним образом. Прямые L_1 и L_2 являются общими касательными к окружностям K_1, K_2 и K_1, K_3, причем точки их касания с окружностями не совпадают с точками касания самих окружностей. Найти угол между прямыми L_1 и L_2.