

2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

1. (2 балла) Для функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ решить уравнение $f(2f(x)) = 117$.

2. (2 балла) Функция $t(x)$ определена на всей числовой оси так, что $t(x) = 0$ для всех $x \leq 0$ и $t(x) = 1$ для $x > 0$. Решить уравнение

$$\sin 2x = 0,5 \cdot t\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1,5 \cdot t(x - \pi) + t(x - 2\pi).$$

3. (2 балла) $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия с $a_1 = 3$ и разностью $d = 2$. S_n – сумма первых ее n членов. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что $f(a_n) = S_n$ для всех натуральных n . Найти a, b и c .

4. (2 балла) При каких натуральных n множество решений неравенства $15x^2 - 2(n+15)x + (n-6)(20-n) \leq 0$ содержит ровно 3 целых числа?

5. (2 балла) Математической моделью шарикового подшипника является кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 радиусов r (внутреннее) и R (внешнее), а также n окружностей (шариков) радиуса ρ , расположенных внутри кольца, касающихся между собой и окружностей K_1 и K_2 . Напишите формулу зависимости радиуса внешней окружности R от ρ и n .