2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Ответы и решения

1. Ответ: 1) 4 человека читали книги, ходили на рыбалку, но не собирали грибы 2) 17
Решение. На диаграмме изображено распределение ребят по интересам:

Буквами x, y, z, u, v, w, t обозначены количества школьников, занимающиеся одним из вариантов деятельности. Например, буквой v обозначено число рыбаков, занимающихся сбором грибов, но не читающих книг.

Условия задачи:

$$\begin{cases} x+y+z+u+v+w+t=57 \\ x+u+v+t=25 \\ y+v+w+t=26 \\ z+u+w+t=27 \\ w+t=9 \\ v+t=8 \end{cases}$$

Преобразование: $\begin{cases} x+u=17 \\ y+v=17 \\ z+u=18 \\ w=9-t \\ v=8-t\ge 0 \to 0\le t\le 8 \end{cases} \to \begin{cases} x=17-u \\ y=9+t \\ z=18-u \\ w=9-t \\ v=8-t\ge 0 \to 0\le t\le 8 \end{cases}$

Подстановка x, y, z, v, w в первое уравнение системы $17-u+9+t+18-u+u+8-t+9-t+t=57 \to 61-u=57 \to u=4$.

Тогда $\begin{cases} x=13 \\ y=9+t \\ z=14 \\ w=9-t \\ v=8-t\ge 0 \to 0\le t\le 8 \end{cases}$. Максимальное значение y соответствует $t=8$ и равно 17.

2. Ответ: $a=\frac{3}{2}, a=-12$

Решение. $P(x^2)=ax^4-3x^2+5 \to P(x^2)-P(x)=ax^2(x^2-1)-3x(x-1)=0$.

$x=0,\ x=1$ являются решениями при любых a. Остальные корни удовлетворяют уравнению: $ax^2+ax-3=0$. Исходное уравнение имеет три корня, если $x=0$ или $x=1$ являются решениями уравнения $ax^2+ax-3=0$. Для $x=0$ это невозможно, $x=1$ является решением при $a=3/2$. В этом случае, $x=-2$ является третьим корнем. Второй вариант, когда дискриминант уравнения $ax^2+ax-3=0$ равен нулю, т.е. $a^2+12a=0\to\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-12\end{array}\right.$. При $a=0$ корней нет, а при $a=-12$ есть корень $x=-1/2$.

3. Ответ: 1) $x=3,\ y=9$ 2) $x=11,\ y=1$

Решение.

Умножим правую и левую части второго уравнения на $\text{НОД}(x,y)$ и воспользуемся равенством $\text{НОД}(x,y)\cdot\text{НОК}(x,y)=x\cdot y$. Тогда $x\cdot\left(\text{НОД}(x,y)\right)^2=xy\to y=\left(\text{НОД}(x,y)\right)^2$, т.е. y является квадратом целого числа. Из всех допустимых $y\in[1;11]$ таких чисел всего три: $y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=9$.

Проверим каждое и них:

Случай 1. $y_1=1,\ x_1=11\to\text{НОД}(x_1,y_1)=1,\ \text{НОК}(x_1,y_1)=11\to$ уравнение удовлетворяется.

Случай 2. $y_2=4,\ x_2=8\to\text{НОД}(x_2,y_2)=4,\ \text{НОК}(x_2,y_2)=8\to$ уравнение не удовлетворяется.

Случай 3. $y_3=9,\ x_3=3\to\text{НОД}(x_3,y_3)=3,\ \text{НОК}(x_1,y_1)=9\to$ уравнение удовлетворяется.

4. Ответ: $0,5$

Решение.

Условием существования корней является:

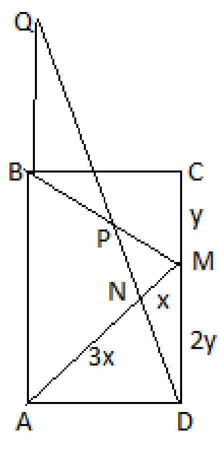
$D/4=4(a+2)^2-4(6a+7)=4\left(a^2-2a-3\right)=4(a+1)(a-3)\ge0\to a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Теорема Виета: $\begin{cases}x_1+x_2=-(a+2)\\x_1\cdot x_2=\dfrac{6a+7}{4}\end{cases}\to x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=(a+2)^2-\dfrac{6a+7}{2}=a^2+a+0,5\to\min$

Наименьшее значение квадратный трехчлен достигает при $a=-1$ и это значение равно $0,5$.

5. Ответ: $MP:PB=2:3$

Решение.



$\triangle ANQ\sim\triangle MND$ с коэффициентом подобия $k=3$. Тогда $AQ=6y$, $BQ=3y$

$\triangle QBP\sim\triangle DMP$ с коэффициентом подобия $3/2$. Тогда отношение сходственных сторон $MP:PB=2:3$.

2.21. Критерии определения победителей и призеров Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом» 2015-2016 учебного года, Математика

Оргкомитет Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» установил следующие принципы оценивания работ заключительного тура и определения победителей и призеров олимпиады 2015-2016 учебного года.

1. Максимальная оценка за каждую задачу – 2 балла независимо от уровня сложности задачи.
2. Каждая задача в зависимости от полноты решения оценивалась оценкой: 0 баллов, 0,5 балла, 1 балл, 1,5 балла или 2 балла.
3. Оценка олимпиадной работы равна сумме оценок за все задачи.
4. Если сумма оценок за задачи оказывается «полуцелой» (5.5, 6.5 и т.д.), оценка округляется до целого значения с избытком или недостатком по усмотрению проверяющего работу члена жюри.
5. Победителями и призерами олимпиады считаются участники заключительного тура, получившие следующие оценки

Класс	Оценки победителей и призеров		
	Победитель	Призер 2 степени	Призер 3 степени
7	10-9	8	7
8	10	9	нет
9	10	9	8
10	10	9	нет
11	10-12	9	8