2.16. Олимпиада имени И.В.Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

Ответы и решения

1. Ответ: $12{,}5$

Решение.

Условием существования корней является: $D/4 = 4(a+2)^2 - 4(6a+7) = 4\left(a^2-2a-24\right) = 4(a-6)(a+4) \ge 0 \to a \in (-\infty;-4] \cup [6;+\infty)$.

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(a+2) \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{6a+7}{4} \end{cases} \to x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1+x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = (a+2)^2 - \dfrac{6a+7}{2} = a^2 + a + 0{,}5 \to \min$

Наименьшее значение на множестве $a \in (-\infty;-4] \cup [6;+\infty)$ квадратный трехчлен достигает при $a=-4$ и это значение равно $12{,}5$.

2. Ответ: $S_{\min} = \dfrac{4\pi^2}{7}$

Решение.

Первое уравнение в системе равносильно объединению прямых $\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} - y + 2\pi k \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + y + 2\pi m,\ m,k \in Z \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} 2x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \ \ (l_1) \\ 2x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \ \ (l_2) \end{array}\right.$, на которых могут лежать стороны параллелограмма.

Аналогично, второе уравнение системы равносильно объединению прямых:
$\left[\begin{array}{l} 2y = \dfrac{\pi}{2} - x - y + 2\pi k \\ 2y = x + y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m,k \in Z \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x + 3y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \ \ (l_3) \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} - 2\pi m \ \ (l_4) \end{array}\right.$, на которых могут лежать стороны параллелограмма.

Две стороны допустимых параллелограммов лежат на любой паре параллельных прямых из (l_1) или (l_2) , а другая пара параллельных сторон лежит на любой паре прямых из (l_3) или (l_4).

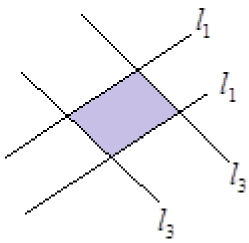


Рис 1

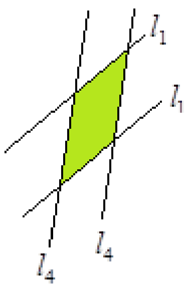


Рис 2

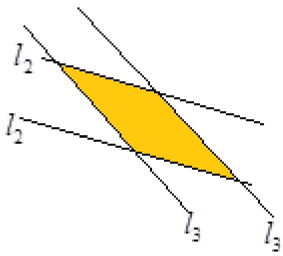


Рис 3

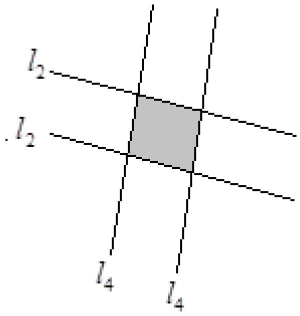


Рис 4

Параллелограмм с наименьшей площадью следует искать среди параллелограммов, параллельные стороны которых лежат на прямых, для которых параметры m (или k) отличаются на 1.

Например, $\left[\begin{array}{l} 2x + y = \dfrac{\pi}{2} \ \ (l_1) \\ 2x + y = \dfrac{5\pi}{2} \ \ (l_1') \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} 2x - y = \dfrac{\pi}{2} \ \ (l_2) \\ 2x - y = \dfrac{5\pi}{2} \ \ (l_2') \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x + 3y = \dfrac{\pi}{2} \ \ (l_3) \\ x + 3y = \dfrac{5\pi}{2} \ \ (l_3') \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} x - y = \dfrac{\pi}{2} \ \ (l_4) \\ x - y = \dfrac{5\pi}{2} \ \ (l_4') \end{array}\right.$.

Расстояние между прямыми l_1 и l_1' равно $h_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$, расстояние между l_2 и l_2' - $h_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$, расстояние между l_3 и l_3' - $h_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}}$, расстояние между l_4 и l_4' - $h_4 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

Воспользуемся формулой для площади параллелограмма через высоты и его угол: $S = \frac{h \cdot H}{\sin\alpha}$. Есть четыре варианта параллелограммов, которые могут иметь наименьшую площадь.

Случай 1. Стороны параллелограмма составляют попарно параллельные прямые l_1, l_1' и l_3, l_3' (рис 1). Угол между прямыми l_1 и l_3: $\cos\alpha_{1,3} = \frac{(\vec{n_1}, \vec{n_3})}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_3}|}$, $\vec{n_1} = (2;1), \vec{n_3} = (1;3) \to \cos\alpha_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \sin\alpha_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (могут быть выбраны и другие способы нахождения угла между прямыми). Площадь параллелограмма $S_{1,3} = \frac{4\pi^2}{5}$.

Случай 2. Стороны параллелограмма составляют попарно параллельные прямые l_1, l_1' и l_4, l_4' (рис 2). Угол между прямыми l_1 и l_4: $\cos\alpha_{1,4} = \frac{(\vec{n_1}, \vec{n_4})}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_4}|}$, $\vec{n_1} = (2;1), \vec{n_4} = (1;-1) \to \cos\alpha_{1,4} = \frac{1}{\sqrt{10}} \to \sin\alpha_{1,4} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Площадь параллелограмма $S_{1,4} = \frac{4\pi^2}{3}$.

Случай 3. Стороны параллелограмма составляют попарно параллельные прямые l_2, l_2' и l_3, l_3' (рис 3). Угол между прямыми l_2 и l_3:
$\cos\alpha_{2,3} = \frac{(\vec{n_2}, \vec{n_3})}{|\vec{n_2}| \cdot |\vec{n_3}|}$, $\vec{n_2} = (2;-1), \vec{n_3} = (1;3) \to \cos\alpha_{2,3} = -\frac{1}{\sqrt{50}} \to \sin\alpha_{2,3} = \frac{7}{\sqrt{50}}$

Площадь параллелограмма $S_{2,3} = \frac{4\pi^2}{7}$.

Случай 4. Стороны параллелограмма составляют попарно параллельные прямые l_2, l_2' и l_4, l_4' (рис 4). Угол между прямыми l_2 и l_4:
$\cos\alpha_{2,4} = \frac{(\vec{n_2}, \vec{n_4})}{|\vec{n_2}| \cdot |\vec{n_4}|}$, $\vec{n_2} = (2;-1), \vec{n_4} = (1;-1) \to \cos\alpha_{2,4} = \frac{3}{\sqrt{10}} \to \sin\alpha_{2,4} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Площадь параллелограмма $S_{2,4} = 4\pi^2$.

3. Ответ: $n \geq 3$.
Решение.

Единственной арифметической прогрессией, удовлетворяющей условию $\begin{cases} a_3 + a_5 = -34 \\ a_{12} - a_7 = -20 \end{cases}$ является $a_n = -1 - 4n, n = 1, 2, \ldots$

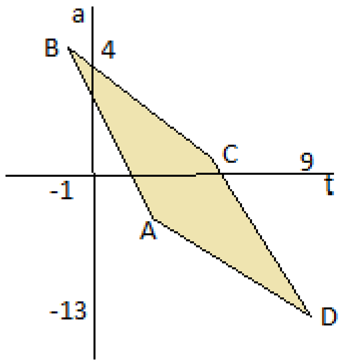
Для любого натурального n решениями неравенства является отрезок $[-4, 4 - a_n]$, который содержит отрезок $[-3;17]$ при $4 - a_n \geq 17 \to 5 + 4n \geq 17 \to n \geq 3$.

4. Ответ: При $a = -2, -4, -5, -7$ система имеет два решения (максимально возможное число)

Решение. Общее решение уравнения $2x-3y=a$ имеет вид $\begin{cases} x=2a+3t, \\ y=a+2t \end{cases}$, $t\in Z$ (*). Подставляя его в неравенства, получим систему неравенств для допустимых значений $(t;a)$: $\begin{cases} 1\le 2a+3t\le 5 \\ 2\le a+2t\le 5 \end{cases}$ (**). На плоскости переменных $(t;a)$ это множество является параллелограммом, ограниченным прямыми: $l_1: a+2t=2,\ l_2: a+2t=5,\ l_3: 2a+3t=1,\ l_4: 2a+3t=5$.

Вершины параллелограмма: $A=l_1\cap l_3: \begin{cases} a+2t=2 \\ 2a+3t=1 \end{cases} \to A(3;-4),\quad B=l_1\cap l_4: \begin{cases} a+2t=2 \\ 2a+3t=5 \end{cases}$

$$C=l_2\cap l_4: \begin{cases} a+2t=5 \\ 2a+3t=5 \end{cases} \to C(5;-5),\quad D=l_2\cap l_3: \begin{cases} a+2t=5 \\ 2a+3t=1 \end{cases} \to D(9;-13)$$



Допустимые целые $a\in[-13;4]$ можно перебрать (18 значений) и выяснить сколько целых значений t, а значит и решений им соответствует. Например, $a=-8$ подставляем в систему(**) $\begin{cases} 1\le -16+3t\le 5 \\ 2\le -8+2t\le 5 \end{cases} \to \begin{cases} 17/3\le t\le 19/3 \to t=6 \\ 5\le t\le 13/2 \to t=5,6 \end{cases} \to t=6$, т.е. значению $a=-8$ соответствует одно решение $x=2,\ y=4$ найденное по формулам (*) при $a=-8,\ t=6$.

Значениям $a=-2,-4,-5,-7$ соответствует по два решения, для значений $a=-12,3$ целых решений нет, для всех остальных $a\in[-13;4]$ - одно целое решение.

5. Ответ: Четыре возможных значения угла $\alpha=90^0\pm 30^0\pm\arcsin\frac{1}{3}$ (без учета того, что угол острый)

Решение. Имеется, вообще говоря, четыре варианта расположения общих касательных к двум парам окружностей K_1, K_2 и K_1, K_3.

Случай 1 расположения прямых L_1 L_2 (рис 1)

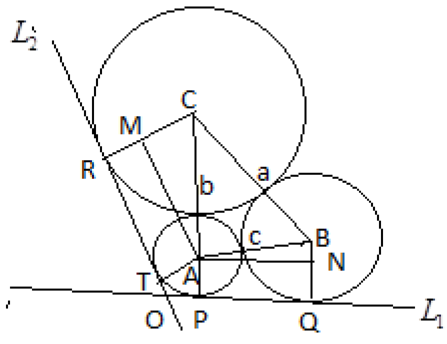


Рис. 1

По условию, $AB = 3,\ AC = 4,\ BC = 5$, т.е. $\measuredangle BAC = 90^0$. В общем случае, $\sin\measuredangle A = \dfrac{2\sqrt{(\rho + r + R)\rho r R}}{(\rho + r)(\rho + R)}$, где $\rho < r < R$ - радиусы окружностей и требуется проверить острый это угол или тупой.

Обозначение $\measuredangle CAM = \alpha_{1,3},\ \measuredangle BAN = \alpha_{1,2}$, $\sin\alpha_{1,3} = \dfrac{1}{2} \to \alpha_{1,3} = 30^0,\ \sin\alpha_{1,2} = \dfrac{1}{3} \to \alpha_{1,2} = \arcsin\dfrac{1}{3}$.

В общем случае, $\sin\alpha_{1,2} = \dfrac{r - \rho}{r + \rho},\ \sin\alpha_{1,3} = \dfrac{R - \rho}{R + \rho}$

Тогда искомый угол α (острый) между прямыми L_1 и L_2 равен

$$\alpha = 180^0 - \left(90^0 + \alpha_{1,2} + \alpha_{1,3}\right) = 60^0 - \arcsin\frac{1}{3}$$

Случай 2 расположения прямых L_1 L_2 (рис 2)

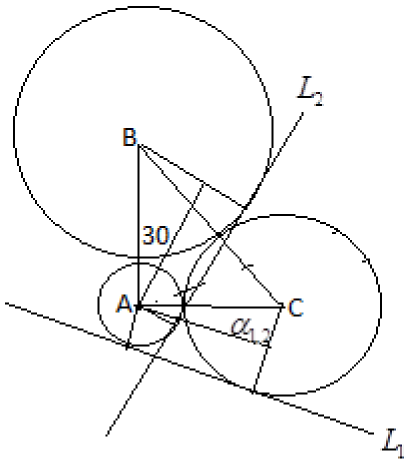


Рис. 2

$$\alpha = \measuredangle BAC - \alpha_{1,3} + \alpha_{1,2} = 60^0 + \arcsin\frac{1}{3}$$

Случай 3 расположения прямых L_1 L_2 (рис 3)

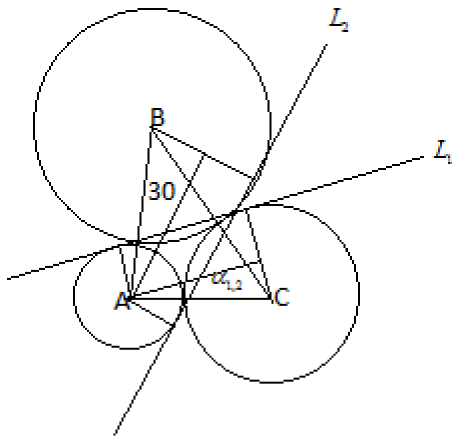


Рис 3

$$\alpha = \measuredangle BAC - \alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} = 60^0 - \arcsin\frac{1}{3}$$

Случай 4 расположения прямых L_1 L_2 (рис 4)

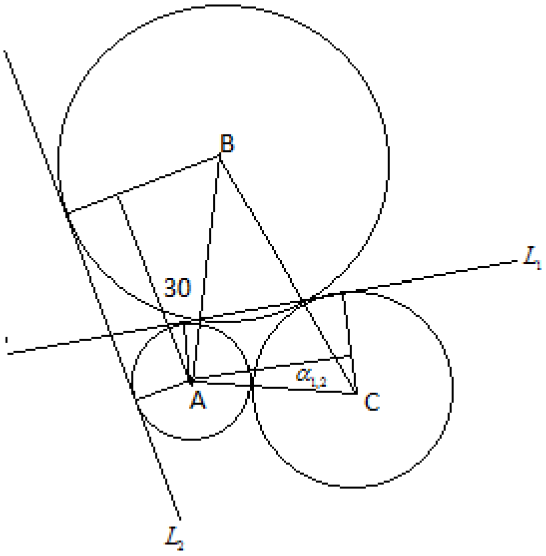


Рис. 4

Тупой угол $\alpha = \measuredangle BAC + \alpha_{1,3} - \alpha_{1,2} = 120^0 - \arcsin\frac{1}{3}$, а острый $\alpha = 60^0 + \arcsin\frac{1}{3}$